# Teoria dei sistemi

Paolo Salaris

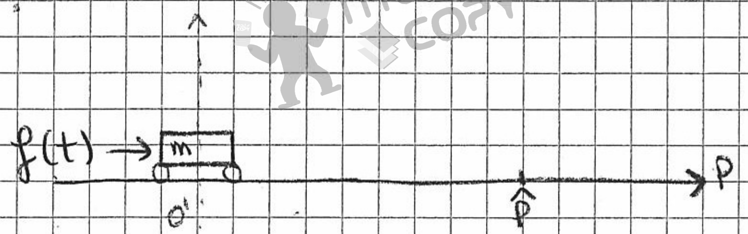
- centro di ricerca Piaggio - TC - ing. energia ⇒ PAGINA DEL CORSO
- e-learning
- ricevimento: VENERDÌ → scrivere almeno 1 giorno prima [TDS - Energ]
- testi consigliati: - DISPENSE (appunti di Bicchi)
  - ES. SVOLTI
- esame → 2 PARTI: 1^ parte scritta → progetto di un controllore ⇓ MATHLAB
  2^ parte orale → domande teoriche
- testi di esame vecchi → MATERIAL
  ↳ LINK automatica (material)
- esercitazioni in classe

# FONDAMENTI DI AUTOMATICA

## Introduzione

PROBLEMA:

Si analizza il movimento di un carrello m su un binario senza attrito, da $p=0$ a $p=\hat{p}$. Bisogna scegliere la forza f con cui spingiamo il carrello, affinché il carrello raggiunga $\hat{p}$ con precisione elevata con una precisione dell'1%.




DATI:

- $p = \hat{p} \pm \delta\hat{p}$ $(\delta\hat{p} \sim 1\%)$
- $m = \bar{m} \pm \delta\bar{m}$ $(\delta\bar{m} \sim 10\%)$ ($\bar{m}$ = massa nominale)
- $p(0) = v(0) = 0$ COND. INIZIALI

SOLUZIONE:

① Scrivo le equazioni del moto del sistema

$$a(t) = \frac{f(t)}{m} \quad \text{(acc. del carrello)} \Rightarrow \text{MODELLO}$$

② Scrivo la LEGGE DI CONTROLLO

$$f(t) = \begin{cases} F & \text{per } 0 \le t \le t_1 \\ -F & \text{per } t_1 < t \le T \\ 0 & \text{per } t > T \end{cases}$$

$\Rightarrow$ in questo caso decido di imprimere al carrello una certa forza F fino all'istante $t_1$ e poi di frenarlo fino all'istante T, finché poi rimarrà fermo.

③ Risolvo analiticamente per trovare $\hat{p}$

eq moto $\Rightarrow p(t) = p(t_0) + v(t_0)t + \frac{1}{2}\frac{f(t)}{m}t^2$

- per $0 \le t \le t_1 \Rightarrow p(t) = p(0) + v(0)t + \frac{1}{2}\frac{F}{m}t^2$ accel.
- per $t_1 < t \le T \Rightarrow p(t) = p(t_1) + v(t_1)(t-t_1) - \frac{1}{2}\frac{F}{m}(t-t_1)^2$ decel.
- per $t > T \Rightarrow p(t) = p(0)$

Scrivo $p(t_1)$ sfruttando la prima equazione che ho scritto:

$$p(t_1) = \underset{0}{\underset{\shortparallel}{p(0)}} + \underset{0}{\underset{\shortparallel}{v(0)}}\, t_1 + \frac{1}{2}\frac{F}{m}t_1^2$$

Faccio la stessa cosa per le velocità:

eq. $\Rightarrow v(t) = v(t_0) + a\,t$ (dove $a = \frac{F}{m}$)

- per $0 \le t \le t_1 \Rightarrow v(t) = v(0) + \frac{F}{m} t$
- per $t_1 < t \le T \Rightarrow v(t) = v(t_1) - \frac{F}{m}(t - t_1)$
- per $t = T \Rightarrow v(T) = v(t_1) - \frac{F}{m}(T - t_1)$

allora $v(T) = \underset{0}{\underbrace{v(0)}} + \frac{F}{m} t_1 - \frac{F}{m} T + \frac{F}{m} t_1$

$v(T) = 0$ affinché il carrello sia fermo in $T$, allora:

$\frac{\cancel{F}}{\cancel{m}}(2t_1 - T) = 0 \Rightarrow 2t_1 = T \Rightarrow t_1 = \frac{T}{2}$ sarà esattamente a metà l'istante in cui bisogna iniziare a frenare il carrello.

DATO CHE NON CI SONO ATTRITI

Posso ora calcolare $\hat{P} = p(T)$, dalle equazioni che ho scritto.

$p(T) = p(t_1) + v(t_1)(T - t_1) - \frac{1}{2}\frac{F}{m}(T - t_1)^2$ (dalla 2^ equazione delle posizioni)

$p(t_1) = \frac{1}{2}\frac{F}{m} t_1^2$ ; $t_1 = \frac{T}{2}$ ; $v(t_1) = \underset{0}{\underbrace{v(0)}} + \frac{F}{m} t_1$ Sostituisco:

$$\hat{P} = p(T) = \frac{1}{2}\frac{F}{m}\left(\frac{T}{2}\right)^2 + \left(\frac{F}{m}\cdot\frac{T}{2}\right)\left(T - \frac{T}{2}\right) - \frac{1}{2}\frac{F}{m}\left(T - \frac{T}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}\frac{F}{m}\frac{T^2}{4} + \frac{FT^2}{2m} - \frac{FT^2}{4m} - \frac{1}{2}\frac{F}{m}\left(\cancel{T^2} + \frac{T^2}{4} - \cancel{T^2}\right)$$

$$= \cancel{\frac{FT^2}{8m}} + \frac{FT^2}{2m} - \frac{FT^2}{4m} - \cancel{\frac{FT^2}{8m}}$$

$$= \frac{FT^2}{m}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{FT^2}{m}\left(\frac{2-1}{4}\right) = \frac{FT^2}{4m} \Rightarrow \hat{P} = \frac{FT^2}{4m}$$

Questa soluzione è soggetta però a molti problemi:

1. $\hat{P}$ è soggetta a errore a causa dell'incertezza sulla massa
2. $\hat{P}$ non sarebbe questa se nel sistema fisico ci fosse una forza di attrito. Infatti se ci fosse, il carrello si fermerebbe prima di $\hat{P}$
3. $\hat{P}$ cambierebbe moltissimo se fossero diverse le CONDIZIONI INIZIALI

Per verificare direttamente queste osservazioni, sono molto utili SOFTWARE DI SIMULAZIONE con interfaccia grafica come il pacchetto SIMULINK del programma Matlab.

È meglio studiare questi problemi basandosi sull'attuale EVOLVERE DEL SISTEMA. ⇒ nel nostro caso tramite un SENSORE DI POSIZIONE che ci permette di misurare la posizione istantanea del carrello $p(t)$

$\hat{p}$ = riferimento

parametro del mio controllo $\quad f = K\underbrace{(\hat{p}-p)}_{e = \text{errore di simulazione}}$ (legge in retroazione)

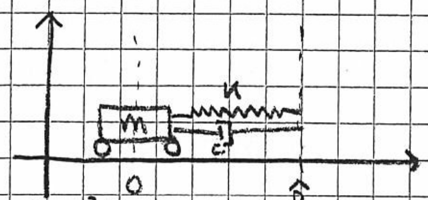
LEGGE IN RETROAZIONE → ATTUATORE (motore che genera $f$)
→ SENSORE (misura la posizione)
→ ELABORATORE (elabora i segnali)

$$a = \frac{f}{m} = \frac{K(\hat{p}-p)}{m} = \ddot{p}$$

equazione del sistema originale con la nuova legge di spinta

$$\ddot{p} - \frac{K(\hat{p}-p)}{m} = 0$$

→ COINCIDE CON UN SISTEMA DI PARI MASSA COLLEGATO AD UNA MOLLA DI COSTANTE K
⇓
SISTEMA OSCILLANTE RISPETTO A $\hat{p}$



$U = \frac{1}{2}K(\hat{p}-p)^2$ en. iniziale della molla

Per risolvere il problema e ridurre le oscillazioni devo introdurre uno SMORZATORE; il problema è risolto quindi dalla seguente legge:

$$f(t) = K(\hat{p}-p) - C\dot{p}$$

Scelte opportunamente le costanti ($K$ e $C$) si potranno rispettare le specifiche date.

Inoltre, assumendo questa legge, c'è anche la possibilità di misurare la velocità del carrello ($\dot{p}$), tramite un ulteriore sensore.

CONTROLLO IN ANELLO CHIUSO ⇒ $f(t) = K(\hat{p}-p)$

consiste in una perfezione del modello, bisogna controllare le incertezze sul problema in esame. ANELLO APERTO significa che non so come si evolverà il sistema (era la nostra legge prima della legge in retroazione).