# ELEMENTI COSTRUTTIVI DI MACCHINE BIOMEDICHE

## TENSORE DEGLI SFORZI (Stress Tensor):

Lo sforzo è la forza per unità di area rispetto a tutte le orientazioni della superficie. È una densità superficiale di forza e misura la relazione fra forze esercitate tra punti materiali adiacenti.

$$\text{Tensione o Sforzo} = \frac{F}{A} = \frac{[N]}{[m^2]} = [Pa]$$

Per sforzi elevati si utilizza: MPa, GPa, KPa

È molto importante definire la direzione della forza e la direzione $\perp$ alla superficie. La superficie su cui agisce lo sforzo determina il modo in cui il materiale reagisce.

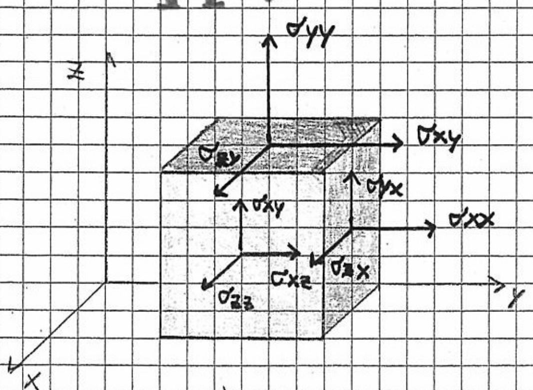
↳ importante: · direzione e ampiezza superficie
· orientazione della superficie rispetto alla forza

Definiamo lo sforzo con:

| | | |
|---|---|---|
| → Ampiezza forza | SCALARE (amp) | grado ∅ |
| → Direzione forza | + VETTORE (amp + dir) | grado 1 |
| → Orientazione Superficie | + TENSORE (amp + dir + sup) | grado 2 |

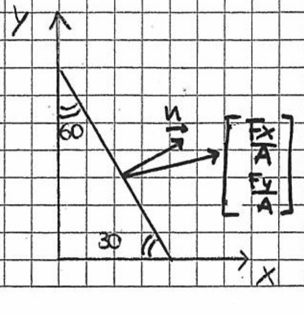
Il tensore degli sforzi o di Cauchy è definito da $\sigma$ affiancato da due pedici:

$\sigma_{xy}$ → 2° PEDICE indica la direzione $\perp$ al piano su cui agisce la forza
↳ 1° PEDICE indica la direzione della forza




$$\underset{\rightarrow}{\sigma} = \underset{\rightrightarrows}{T} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

$$\underset{\rightarrow}{S} = \underset{\rightrightarrows}{T} \cdot \underset{\rightarrow}{n} \quad \left(\text{sforzo = tensore degli sforzi scalar } n\right)$$

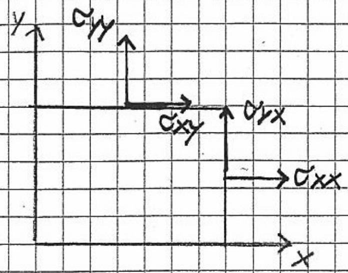



$$\left[\begin{matrix} \frac{F_x}{A} \\ \frac{F_y}{A} \end{matrix}\right]$$

$$\underset{\rightarrow}{n} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \qquad \underset{\rightrightarrows}{T} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix}$$

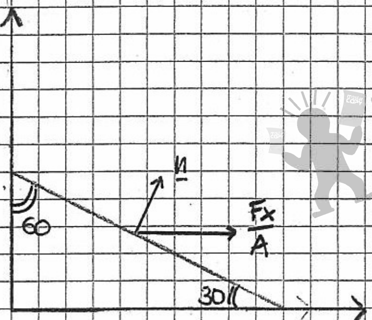
$$\begin{cases} \frac{F_x}{A} = \frac{1}{2}\sigma_{xx} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_{xy} \\ \frac{F_y}{A} = \frac{1}{2}\sigma_{yz} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_{yy} \end{cases}$$

## FIGURA IN 2D




$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix}$$

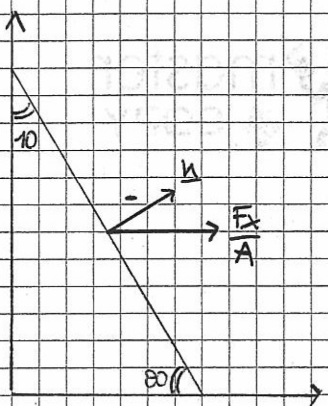
## ESERCIZIO




$$\underline{n} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{F_x}{A} \\ 0 \end{pmatrix}$$

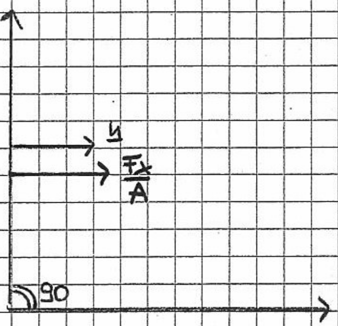
$$\frac{1}{2}\sigma_{xx} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_{xy} = \frac{F_x}{A}$$






$$\underline{n} = \begin{pmatrix} 0.98 \\ 0.17 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.98 \\ 0.17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{F_x}{A} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$0.98\,\sigma_{xx} + 0.17\,\sigma_{xy} = \frac{F_x}{A}$$




$$\underline{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{F_x}{A} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{xx} = \frac{F_x}{A}$$

## IMPORTANTE

In un solido abbiamo un equilibrio rotazionale ovvero non cambiano le posizioni relative fra gli atomi perciò il tensore degli sforzi è simmetrico <u>sempre</u>!

2D $\begin{pmatrix} T_{xx} & \underline{T_{xy}} \\ \underline{T_{yx}} & T_{yy} \end{pmatrix} \quad \{ T_{xy} = T_{yx} \}$

└ ALTRIMENTI non è un solido

3D $\begin{pmatrix} T_{xx} & \underline{T_{xy}} & \underline{T_{xz}} \\ \underline{T_{yx}} & T_{yy} & \underline{T_{yz}} \\ \underline{T_{zx}} & \underline{T_{zy}} & T_{zz} \end{pmatrix} \quad \begin{cases} T_{xy} = T_{yx} \\ T_{yz} = T_{zy} \\ T_{xz} = T_{zx} \end{cases}$

# TRUE STRESS e ENGINEERING STRESS

ENGINEERING STRESS = forza applicata per unità di area originale di un campione $\quad \sigma = \dfrac{F}{A_0}$

REAL STRESS => $\sigma_T = \dfrac{F}{A}$

Materiale Hookeano Incomprimibile soggetto a forze uniassiale ($\nu = 0.5$) $\longrightarrow$ Volume costante $\longrightarrow$ $dVol = 0$

$$dVol = 0 \rightarrow Al = A_0 l_0$$
$$\hookrightarrow A = \frac{A_0 l_0}{l}$$

$$\sigma = \frac{F}{A_0}$$

$$\sigma_T = \frac{F}{A} = \frac{F}{A_0 l_0 / l} = \sigma \frac{l}{l_0}$$

$$\varepsilon_z = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{l}{l_0} - 1 \Rightarrow \frac{l}{l_0} = \varepsilon_z + 1$$

$$\sigma_T = \sigma \frac{l}{l_0} = \sigma(\varepsilon_z + 1)$$

↳ eng strain

↳ eng stress

se $\varepsilon > 1$
true stress > eng stress

Materiale Hookeano non necessariamente incomprimibile

$$\sigma = \frac{F}{A_0} \qquad \sigma_T = \frac{F}{A} \quad \Longrightarrow \quad \sigma_T = \frac{\sigma A_0}{A}$$

$$A_0 = X_0 Y_0 \qquad A = XY$$

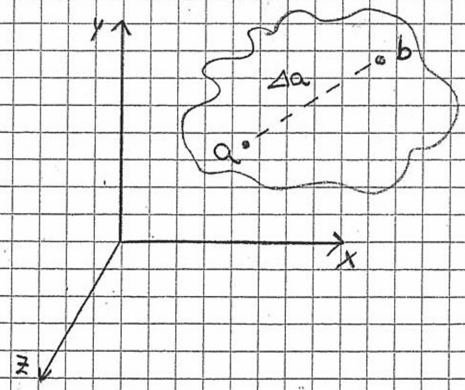
$$\varepsilon_x = -\nu \varepsilon_z = \varepsilon_y$$

$$\varepsilon_x = \frac{X - X_0}{X_0} = -\nu \varepsilon_z \longrightarrow X = -\nu \varepsilon_z X_0 + X_0 = X_0(1 - \nu\varepsilon_z)$$
$$Y = Y_0(1 - \nu \varepsilon_z)$$

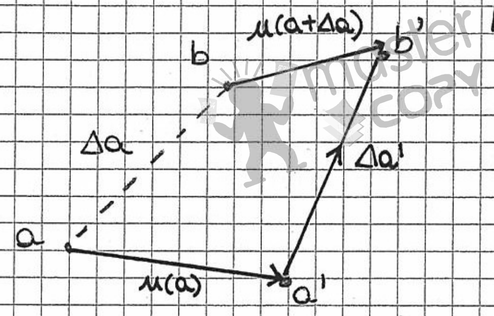
$$\sigma_T = \frac{\sigma X_0 Y_0}{Y_0(1-\nu\varepsilon_z) X_0 (1-\nu\varepsilon_z)} = \frac{\sigma}{(1-\nu\varepsilon_z)^2}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_z << 1 \\ \nu = 0 \end{cases} \Longrightarrow \sigma_T = \frac{\sigma}{1 - \varepsilon_z}$$

**SPOSTAMENTO:**




Δa = distanza fra 2 punti adiacenti detti unità base.
Se si sposta il materiale significa che si deformano le unità




Dopo questo spostamento quanto disto a' da b'?

$\Delta a' = b' - a'$

$a' = a + u(a)$

$b' = b + u(a + \Delta a)$

ma $b = a + \Delta a$

quindi
$$\begin{aligned}\Delta a' &= b + u(a+\Delta a) - a - u(a)\\ &= \cancel{a} + \Delta a + u(a+\Delta a) - \cancel{a} - u(a)\\ &= \Delta a + \Delta u\end{aligned}$$

$\Delta u = \Delta a' - \Delta a$

↳ differenza fra lo spostamento di due punti adiacenti

U è un vettore con componenti: $u_x, u_y, u_z$

$$\Delta U_x = \frac{\partial U_x}{\partial x}dx + \frac{\partial U_x}{\partial y}dy + \frac{\partial U_x}{\partial z}dz$$

$$\Delta U_y = \frac{\partial U_y}{\partial x}dx + \frac{\partial U_y}{\partial y}dy + \frac{\partial U_y}{\partial z}dz$$

$$\Delta U_z = \frac{\partial U_z}{\partial x}dx + \frac{\partial U_z}{\partial y}dy + \frac{\partial U_z}{\partial z}dz$$

Definiamo il gradiente della differenza di spostamento nelle 3 direzioni, che è un tensore:

$$\underrightarrow{\nabla u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial U_x}{\partial x} & \frac{\partial U_x}{\partial y} & \frac{\partial U_x}{\partial z} \\ \frac{\partial U_y}{\partial x} & \frac{\partial U_y}{\partial y} & \frac{\partial U_z}{\partial z} \\ \frac{\partial U_z}{\partial x} & \frac{\partial U_z}{\partial y} & \frac{\partial U_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

quanto varia lo spostamento nello spazio