NUMERI COMPLESSI

$i^{243} = i^3$ ← resto
$243 \mid 4$
3 60

Forma algebrica

$(a,0) + (0,1)\cdot(b,0) = \boxed{a + ib = z}$

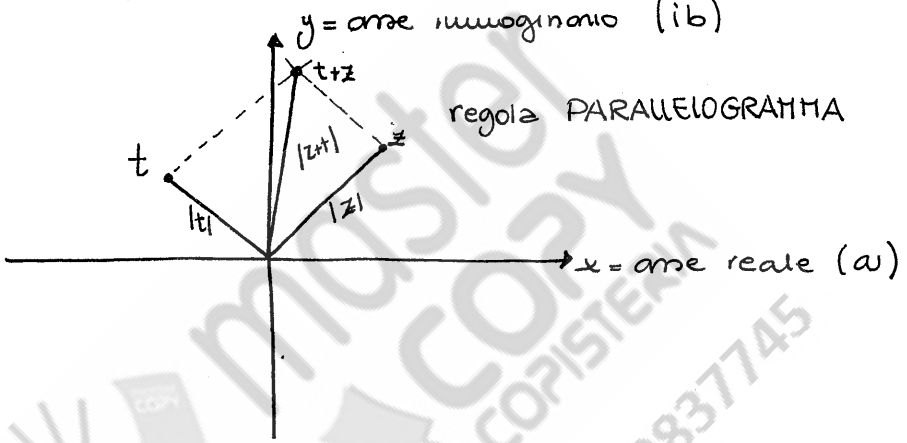
UNITÀ IMMAGINARIA → $i^2 = -1$

- $(a+ib) + (c+id) = (a+c) + i(b+d)$
- $(a+ib)\cdot(c+id) = (ac - bd) + i(ad+bc)$

- i
- $i^2 = -1$
- $i^3 = -i$
- $i^4 = 1$

(!) a: parte reale di z = $Re(z)$
b: parte immaginaria di z = $Im(z)$

PIANO COMPLESSO / PIANO di GAUSS



regola PARALLELOGRAMMA

(NB) Non soddisfa il CAMPO ORDINATO = non è possibile definire una relazione $\leq$ tra numeri $\in \mathbb{C}$

$\boxed{\overline{z} = a - ib}$ → complesso coniugato

- $z + \overline{z} = 2\,Re(z)$ $\quad [(a+ib) + (a-ib) = 2a = 2\,Re(z)]$
- $z - \overline{z} = 2i\,Im(z)$ $\quad [(a+ib) - (a-ib) = 2ib = 2i\,Im(z)]$

OPERAZIONI DI CONIUGIO ⇒
- $\overline{(z_1 + z_2)} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
- $\overline{(z_1 \cdot z_2)} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
- $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

(!) $z \cdot \overline{z} = (a+ib)\cdot(a-ib) = a^2 - i^2b^2 = a^2 - (-1)\cdot b^2 = a^2 + b^2 \geq 0$

$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ ⇒
- $|z| \geq 0$ e $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- $|z| = |\overline{z}|$
- $|Re(z)| \leq |z|$; $|Im(z)| \leq |z|$; $|z| \leq |Re(z)| + |Im(z)|$
- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ – DIS. TRIANGOLARE –
- $|z_1 + z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$

$\boxed{z\,\overline{z} = |z|^2}$

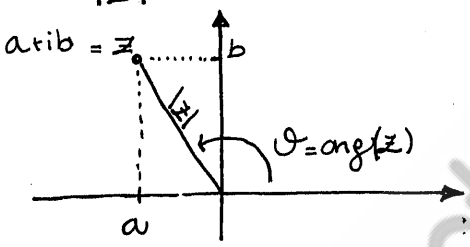
$\boxed{|i| = 1}$

RAPPORTO $\Rightarrow \quad \dfrac{a+ib}{c+id} = \dfrac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)} = \dfrac{a}{|c+id|^2}$

$$= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\,\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$$

FORMA TRIGONOMETRICA

. coordinare polari $\rightarrow$ ρ: raggio polare $= |z|$ / ϑ = angolo polare $= \arg(z)$



MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

N.B. . $-i \rightarrow$ argomento $-\pi/2$ / $\dfrac{3\pi}{2}$ / $-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$

se $\vartheta \in (-\pi, \pi]$ — se $\vartheta \in [0, 2\pi)$

. $0 \rightarrow$ argomento non definito

FORMA TRIGONOMETRICA N $\mathbb{C}$ — FORMULA di DE MOIVRE

$z = a+ib \Rightarrow \boxed{z = \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)} \rightarrow \boxed{z^n = \rho^n(\cos n\vartheta + i\sin n\vartheta)}$

$= \alpha + 2k\pi$

$$\boxed{\rho = \sqrt{a^2+b^2}} \qquad \boxed{\cos\vartheta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}} \qquad \boxed{\sin\vartheta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

. $\boxed{z_1 \cdot z_2} = \rho_1 \cdot \rho_2 \{\cos\vartheta_1 \cdot \cos\vartheta_2 - \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 + i(\sin\vartheta_1 \cos\vartheta_2 + \cos\vartheta_1 \sin\vartheta_2)\} =$

$$= \boxed{\rho_1 \cdot \rho_2 \{\cos(\vartheta_1+\vartheta_2) + i\sin(\vartheta_1+\vartheta_2)\}}$$

. $[z_2 \neq 0] \quad \boxed{\dfrac{z_1}{z_2}} = \dfrac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \dfrac{\cos\vartheta_1 + i\sin\vartheta_2}{\cos\vartheta_2 + i\sin\vartheta_1} \Rightarrow$ moltiplico num / den per $(\cos\vartheta_2 - i\sin\vartheta_1) \Rightarrow \dfrac{\rho_1}{\rho_2} \cdot (\cos\vartheta_1 + i\sin\vartheta_1) \cdot (\cos\vartheta_2 - i\sin\vartheta_2)$

$$\Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \boxed{\frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \{\cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) + i\sin(\vartheta_1 - \vartheta_2)\}}$$

FORMA ESPONENZIALE

$$z = \rho e^{\vartheta}$$

! RICORDA → RADICALE DOPPIO

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}}$$

$$\downarrow$$

$$\iff A^2 - B^2 = C^2$$

Risoluzione equazioni complesse ↓

- Posso passare ai moduli
- Posso sostituire
- Posso moltiplicare per z
- posso dividere per $|z|, |z|^2$ ecc che non pone
- Posso ridurre come eq. di secondo grado
- Posso passare alla forma trigonometrica/esponenziale

$$|z^2 + i|^2 = (z^2 + i)(\bar{z}^2 - i)$$

$$|z^2 - i|^2 = (z^2 - i)(\bar{z}^2 + i)$$

$$|\bar{z}| = |z|$$

Master COPY COPISTERIA 050/8314126 388/9837745

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745



REGOLE PRATICHE PER LA RISOLUZIONE DEI LIMITI DETERMINATI

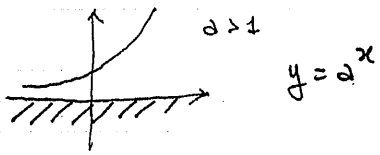
$\infty = \pm\infty$

1. $M \cdot (+\infty) = +\infty$ $\quad M \in \mathbb{R}$
2. $M \cdot (-\infty) = -\infty$ $\quad M \in \mathbb{R}$
3. $+\infty + (+\infty) = +\infty$
4. $-\infty - \infty = -\infty$
5. $\infty \cdot \infty = \infty$ (REGOLA DEI SEGNI) $\quad n \in \mathbb{R}_0$
6. $\infty - \infty = \infty$ (REGOLA DEI SEGNI)
7. $\frac{\infty}{M} = \infty$ (REGOLA DEI SEGNI) $\quad n \in \mathbb{R}$

   Oss. $\frac{M}{0} = \infty$ (REGOLA DEI SEGNI)
8. $\frac{M}{\infty} = 0$ $\quad n \in \mathbb{R}$

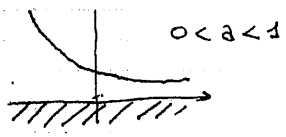
   Oss. $\frac{M}{0} = \infty$
9. $\frac{M}{0} = \infty$ (REGOLA DEI SEGNI) $\quad n \in \mathbb{R}_0$
10. $\infty^n = \infty$ (REGOLA DEI SEGNI) $\quad n \in \mathbb{R}_0$
11. $a^{+\infty} = +\infty$ $\quad a > 1$

    $a^{+\infty} = 0$ $\quad 0 < a < 1$

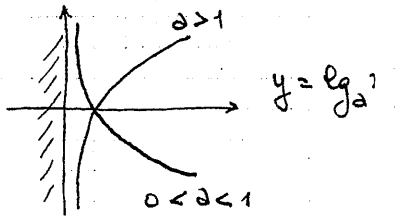


12. $a^{-\infty} = \frac{1}{a^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0$ $\quad a > 1$

    $a^{-\infty} = \frac{1}{a^{+\infty}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$ $\quad 0 < a < 1$



13. $\log_a 0^+ = -\infty$ (NB!) $\quad a > 1$
14. $\log_a(+\infty) = +\infty$ $\quad a > 1$
15. $\log_a(0^+) = +\infty$ $\quad 0 < a < 1$
16. $\log_a(+\infty) = -\infty$ $\quad 0 < a < 1$



Oss. Un ∞ di ordine n prevale su tutti gli ∞ di ordine inferiore.

Es. $\lim_{x \to -\infty} \left(-\frac{2}{3}x^2 + 5\sqrt[3]{x} - \frac{1}{5}x^5 + 7x - 9 \right) = \lim_{x \to -\infty} \left(-\frac{1}{5}x^5 \right) =$

$= -\frac{1}{5}(-\infty)^5 = -\frac{1}{5}(-\infty) = +\infty$

ordine degli ∞ : $\log x, x, x^2, x^3, \ldots, x^n, \ldots, e^x \longrightarrow$

master copy COPISTERIA 050/8312126 338/9837745