DA ~~PAG~~ 1-7

FORMULA BINOMIO — DEFINIZIONE
NUMERI COMPLESSI — " "

DA 8-21

LIMITI DI SUCCESSIONE x — DEFINIZ. E. DIMOST
PROPRIETÀ LIMITI x — " "
CONFRONTO FRA SUCCESSIONI x — DIMOSTRAZIONE
TEOREMA CARABINIERI — " "
PERMANENZA SEGNO — " "
SUCCESSIONI MONOTONE x — TEO. DIMOST.
SUCCESSIONE $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ — DIMOSTR. LIMITE

DA PAG 22-28

SERIE x — DEFINIZIONI
SERIE MENGOLI, ARMONICA, — DIMOSTRAZ
SERIE ARMONICA GENERALIZZATA x — " "
SERIE ESPONENZIALE x — " "
RAGGIO CONVERGENZA x — (APPUNTI SEPARATI)
CRITERI CONFRONTO x

DA PAG 29-40

TEOREMA PONTE x — DIMOSTRAZ
CONTINUITA' x — DEFINIZ
CONTINUITÀ COMPOST x — DEF - DIM.
TEOREMA BOLZANO-WEIERS. x — DIMOSTRAZIONE
PERMANENZA SEGNO — " "
ESISTENZA ZERI — " "
ESISTENZA VALORI INTERMEDI — " "
LIMITI x — DEFINIZIONE
ASINTOTI — " "

DA PAG 41-58

DERIVATA x — DEFINIZIONE
TEO. DERIVAZ FUNZ COMPOSTE — DIMOSTRAZIONE
" " " INVERSE — " "
DERIVAZ SERVE DI POTENZA — " "
DIFFERENZIABILITA' x — " "
TEOREMA ROLLE x — " "
TEOREMA CAUCHY x — " "
TEOREMA LAGRANGE x — " "
TEOREMA DIFFERENZ TOT x — " "
MONOTONIA, SEGNO DERIVATA x — " "
PRINCIPIO DI SOSTITUZ DEGLI INFINIT. — " "
TEOREMA DE L'HÔPITAL — " "
MINIMI E MASSIMI — DEFINIZ.
TEOREMA FERMAT x — DIMOSTR.
CONNESSITÀ — " "

DA PAG 59-71

SOMMA SUPERIORE-SOMMA INFERIORE x — DEFINIZIONE
CRITERIO INTEGRABILITA' x — DIMOSTRAZ
INTEGRALE LINEARE — DIMOSTRAZ
f MONOTONA → INTEGRAB x — DIMOSTRAZ
TEOREMA HEINE-CANTOR x — DEF-DIMOST

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

TEOREMA FONDAMENT INTEGRAL × DEFINIZIONE - DIMOSTRAZIONE

IN AGGIUNTI I CRITERI DI CONVERGENZA × SERIE + FUNZIONI 2 VARIAB.

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 382 9837745

ANALISI I : PREPARAZIONE ORALE

DIMOSTRAZIONE DI PROPOSIZIONI E TEOREMI

① LA FORMULA DEL BINOMIO

Per ogni $n, k \in \mathbb{N}$ con $n \geq k$ definiamo COEFFICIENTI BINOMIALI $\binom{n}{k}$ (n su k)

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

NOTA: $\binom{n}{k} = 1 \rightarrow \begin{cases} k = n \\ \text{o} \\ k = 0 \end{cases}$

In altri casi:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

Dalla definizione seguono le seguenti proprietà:

- SIMMETRIA $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
- LEGGE TRIANGOLO DI TARTAGLIA $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$

```
                    1
                  1   1
                1   2   1
              1   3   3   1
            1   4   6   4   1
          1   5  10  10   5   1
        1   6  15  20  15   6   1
      1   7  21  35  35  21   7   1
    1   8  28  56  70  56  28   8   1
```

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

La denominazione "coefficienti binomiali" nasce dal fatto che questi numeri saltano fuori come coefficienti nella formula di NEWTON che dà lo sviluppo del binomio $(a+b)^n$.

RICORDA: se $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $n \in \mathbb{N}$, la potenza x^n, (1)

andrebbe definita rigorosamente così:

$$\begin{cases} x^0 = 1 \\ x^{n+1} = x \cdot x^n \end{cases} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

se $x = 0 \rightarrow 0^n = 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^+$, mentre 0^0 non si definisce

Posto ciò abbiamo:

TEOREMA: Se $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $n \in \mathbb{N}^+$ si ha

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

DIMOSTRAZIONE: Utilizzando principio d'induzione.

Se $n = 1$ la formula è vera poiché

$$a+b = \binom{1}{0} a^0 b^1 + \binom{1}{1} a^1 b^0 = b + a$$

Suppongo vera la formula $(a+b)^n$, provvisoria per un binomio alla $n+1$, sia

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n \qquad \text{(IPOTESI INDUTTIVA)}$$

$$= (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} =$$

pongo $h = k+1$ (per la prima somma) e $h = k$ (per la seconda somma)

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

ottengo: $\underbrace{\sum_{h=1}^{m+1} \binom{m}{h-1} a^h b^{m+1-h}}_{①} + \underbrace{\sum_{h=0}^{m} \binom{m}{h} a^h b^{m+1-h}}_{②}$

isolando l'ultimo addendo nella ① e primo addendo nella ② si ha

$$= \binom{m}{m} a^{m+1} b^0 + \binom{m}{0} a^0 b^{m+1} + \sum_{h=1}^{m} \binom{m}{h-1} a^h b^{m+1-h} + \sum_{h=1}^{m} \binom{m}{h} a^h b^{m+1-h} =$$

uno poiché h=0 l'ho messo davanti a tutto

$$= a^{m+1} + b^{m+1} + \sum_{h=1}^{m} \left[\binom{m}{h-1} + \binom{m}{h} \right] a^h b^{m+1-h} =$$

per la legge di Tartaglia →

$$= a^{m+1} + b^{m+1} + \sum_{h=1}^{m} \binom{m+1}{h} a^h b^{m+1-h} = \sum_{h=0}^{m+1} \binom{m+1}{h} a^h b^{m+1-h}$$

Per Principio di Induzione la formula è vera $\forall m \in \mathbb{N}^+$.

OSSERVAZIONI:

1) La formula vale più in generale per $a, b \in \mathbb{R}$ e $m \in \mathbb{N}$, se in tale formula si conviene di interpretare il $0^0 = 1$.

2) Scelti $a = -1$, $b = 1$, $m \in \mathbb{N}^+$ si ottiene

$$0 = (-1+1)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-1)^k 1^{m-k},$$

$$= \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} = 0 \quad \forall m \in \mathbb{N}^+$$

3) Scelti $a = 1$, $b = 1$, $m \in \mathbb{N}$ si ottiene

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} = 2^m \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

Quest'uguaglianza ha un'interpretazione combinatoria: ③

2^m è il numero di sottinsiemi distinti di un fissato insieme con m elementi

$\binom{m}{k}$ numero di sottinsiemi distinti aventi k elementi di un insieme con m elementi