CONTENUTO DEL CORSO

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

- LINGUAGGIO DEGLI SPAZI METRICI E NORMATI
- FUNZIONI CONTINUE
- IL CASO EUCLIDEO IN DIMENSIONE FINITA E COMPLESSO
- DIFFERENZIABILITÀ, SVILUPPI DI TAYLOR
- OPERATORI DIFFERENZIALI NOTEVOLI
- CAMPI VETTORIALI CONSERVATIVI, IRROTAZIONALI, A DIVERGENZA NULLA
- INTRODUZIONE ALL'ANALISI COMPLESSA E FORMULA DI CAUCHY
- NOZIONE DI k-SUPERFICIE IN UNO SPAZIO EUCLIDEO, BORDO, ORIENTABILITÀ DI 2-SUPERFICIE NELLO SPAZIO EUCLIDEO TRIDIMENSIONALE
- TEOREMI DELLE FUNZIONI IMPLICITE, DI INVERTIBILITÀ LOCALE E DEL RANGO
- MASSIMI E MINIMI DI FUNZIONI REALI IN PIÙ VARIABILI REALI
- SPAZI DI FUNZIONI, COMPLETEZZA, CONVERGENZA IN NORMA E TOTALE
- INTRODUZIONE ALLA TEORIA DELLA MISURA E INTEGRAZIONE SECONDO LEBESGUE IN PIÙ VARIABILI
- COMPLETEZZA DEGLI SPAZI DI FUNZIONI CON LE NORME INTEGRALI
- INTEGRAZIONE SU SUPERFICIE
- SISTEMI LINEARI DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE
- SISTEMI ORTONORMALI IN SPAZI DI HILBERT
- SERIE TRIGONOMETRICHE
- SOLUZIONE PER SERIE DI FOURIER DEL PROBLEMA DI CAUCHY PER L'EQUAZIONE DEL CALORE IN UNA VARIABILE SPAZIALE CON DIVERSE CONDIZIONI AGLI ESTREMI
- TRASFORMATA DI FOURIER-LAPLACE.
- REGOLARITÀ DELLA FUNZIONE E DECADIMENTO DELLA TRASFORMATA
- APPLICAZIONE ALL'EQUAZIONE DEL CALORE
- PROBLEMA DI CAUCHY PER L'EQUAZIONE DEL CALORE CON DATI AGLI ESTREMI DI UN INTERVALLO: METODO DI SEPARAZIONE DI VARIABILI E METODO PER SERIE TRIGONOMETRICHE
- INTRODUZIONE ALL'EQUAZIONE DELLA CORDA VIBRANTE E DELLE ONDE
- EQUAZIONE DI LAPLACE E FUNZIONI ARMONICHE
- PROBLEMA DI CAUCHY-DIRICHLET PER L'EQUAZIONE DEL CALORE IN PIÙ VARIABILI

DOMANDE PIÙ FREQUENTI ✓ ~ ×

- Completezza ~
- Compattezza ~
- Teorema Beppo. Levi (caso in due e in più variabili) ~×
- Differenziabilità, derivate ✓
- Teorema convergenza
- Teorema Lebesgue ×
- Integrale di Lebesgue ~
- Piano tangente ~
- Cauchy - Schwarz ~
- Spazi metrici ✓
- ~~Teorema convergenza~~
- Teorema integrabilità ?
- Teorema Stocks ×
- Misura esterna ~
- Disegnare grafico di una serie ?
- Definizione limite ad una variabile ? ✓
- Teorema del Dini ~
- Gauss-Green ×
- ~~Stokes~~
- Massimi/minimi funz. a più variabili ✓
- Convergenza ✓
- Funzioni misurabili ~
- Funzioni semplici ✓
- Funzioni localmente sommabili ×
- Funzione classe C^2 Taylor ~
- Studi funzione chiusa limitata di classe C^1
- Lemma di Fatou ×
- Divergenza ~

master copy COPISTERIA 050/8312126 388/9837745

SPAZI METRICI

1.1. SUCCESSIONI DI FUNZIONI

Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni a valori reali o complessi definite su un sottoinsieme A di $\mathbb{R}$ o di $\mathbb{R}^m$ o di $\mathbb{C}^m$; sia f un'altra funzione definita su A.

DEFINIZIONE 1.1.1: Diciamo che la successione $\{f_n\}$ converge puntualmente alla funzione f di A se per ogni $x\in A$ la successione numerica $\{f_n(x)\}$ converge al numero $f(x)$, ossia se:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x\in A$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall x\in A,\ \forall \varepsilon>0\ \exists \nu\in\mathbb{N} : |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon\ \ \forall n\geq\nu$$

DEFINIZIONE 1.1.2: Diciamo che la successione $\{f_n\}$ converge uniformemente alla funzione f di A se risulta

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in A} |f_n(x)-f(x)| = 0$$

$$\Updownarrow$$

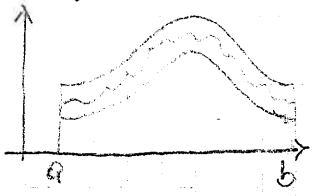
$$\forall \varepsilon>0\ \exists \nu\in\mathbb{N} : |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon\ \ \forall n\geq\nu,\ \forall x\in A$$

Osservazione

- La differenza fra convergenza puntuale ed uniforme sta in "$\forall x\in A$" che si sposta dall'inizio alla fine della frase ⇒ l'indice ν, cioè la soglia oltre la quale $|f_n(x)-f(x)|$ è piccola, va a dipendere solo da ε, e non da ε e x. Dunque 1.1.2. è più restrittiva di 1.1.1, quindi la convergenza UNIFORME implica la PUNTUALE.

- Affinché le f_n convergano uniformemente a f in A occorre e basta che $\forall \varepsilon>0$ i grafici delle f_n siano contenuti definitivamente nell'intorno tubolare del grafico di f di raggio ε, ossia nell'insieme

$$\{(x,y) : x\in A,\ |y-f(x)|<\varepsilon\}$$



- 1.1.2 si applica anche a successioni di funzioni non limitate.

⇒ Accanto alle successioni di funzioni si considerano anche le serie di funzioni.

Se $\{f_n\}$ è una successione di funzioni definite in un insieme $A\subseteq\mathbb{R}$ o $A\subseteq\mathbb{R}^m$ o $A\subseteq\mathbb{C}^m$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ è la successione $\{s_n\}$ delle somme parziali, con:

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$$

~~Alle serie di funzioni si applicano quindi le nozioni di convergenza~~

Alle serie di funzioni si applicano quindi le nozioni di convergenza puntuale ed uniforme:

→ la serie $\sum f_n$ converge puntualmente in A se $\forall x \in A$ la serie numerica $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ è convergente:

$$\forall x \in A,\ \forall \varepsilon > 0\ \ \exists \nu \in \mathbb{N} : \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| < \varepsilon\ \ \forall n \geq \nu$$

→ la serie $\sum f_n$ converge uniformemente in A se

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in A} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| < \varepsilon\ \ \forall n \geq \nu,\ \ \forall x \in A$$

Per le serie di funzioni si hanno però altri 2 tipi di convergenza:

i) la serie $\sum f_n$ converge assolutamente in A se $\forall x \in A$ la serie numerica $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ è assolutamente convergente, cioè se $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x)|$ è convergente

ii) la serie $\sum f_n$ converge totalmente in A se la serie numerica $\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{x \in A} |f_n(x)|$ è convergente

Confrontiamo i 4 tipi di convergenza

PROPOSIZIONE 1.1.5: Sia $\sum f_n$ una serie di funzioni definite su un sottoinsieme A di $\mathbb{R}$ (o $\mathbb{R}^m$ o $\mathbb{C}^m$). Allora:

i) la convergenza totale implica la convergenza uniforme e quest'ultima implica la convergenza puntuale

ii) la convergenza totale implica quella assoluta, che implica quella puntuale

iii) non vi sono implicazioni tra convergenza uniforme e assoluta, né valgono le implicazioni contrarie i), ii)

Nel caso particolare di serie di potenze valgono i seguenti risultati:

TEOREMA 1.1.6: Sia $\sum a_n z^n$ una serie di potenze con raggio di convergenza $r \in]0, \infty]$. Allora la serie converge totalmente ed uniformemente in ogni cerchio chiuso $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \rho\}$, $\rho \in]0, r[$

TEOREMA 1.1.7 (DI ABEL): Sia $\sum a_n z^n$ una serie di potenze con raggio di convergenza $r \in]0, \infty]$ e supponiamo che $\exists z_0 \in \mathbb{C}$, con $|z_0| = r$, tale che la serie $\sum a_n z_0^n$ sia convergente ad un numero $A \in \mathbb{C}$. Allora la serie $\sum a_n z^n$ converge uniformemente nel segmento $S_0 = \{t z_0 : t \in [0,1]\}$.

1.2 PROPRIETÀ DELLA CONVERGENZA UNIFORME

La convergenza uniforme preserva diverse proprietà funzionali, di cui la più importante è la continuità: questa proprietà non è stabile per la convergenza puntuale, ma lo è per la convergenza uniforme.

TEOREMA 1.2-1: Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni continue in un sottoinsieme A di $\mathbb{R}$ (o $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{C}^m$).
Se $f_n \to f$ uniformemente in A, allora f è continua in A.

TEOREMA 1.2-2: Sia x_0 un punto d'accumulazione per un insieme A contenuto in $\mathbb{R}$ (o $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{C}^m$), e sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni definite in A, che converge uniformemente in A ad una funzione f. Se $\forall n \in \mathbb{N}$ esistono i limiti

$$\lim_{x \to x_0} f_n(x) = L_n$$

allora esistono anche i due limiti

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \quad , \quad \lim_{n \to \infty} L_n$$

e sono uguali.

Il senso di questo enunciato è che, nelle ipotesi indicate, si può invertire l'ordine dei limiti:

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} \lim_{x \to x_0} f_n(x)$$

TEOREMA 1.2-4: Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni derivabili in $[a,b]$, tali che $f_n \to f$ uniformemente in $[a,b]$ e $f_n' \to g$ uniformemente in $[a,b]$.
Allora f è derivabile in $[a,b]$ e risulta $f' = g$.

Ciò significa che si può scambiare la derivazione con il limite

$$\frac{d}{dx} \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{d}{dx} f_n(x)$$

L'integrabilità secondo Riemann su intervalli limitati è un'altra proprietà che viene preservata dalla convergenza uniforme.

TEOREMA 1.2-6: Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni integrabili secondo Riemann nell'intervallo $[a,b]$. Se le f_n convergono uniformemente in $[a,b]$ ad una funzione f, allora f è integrabile su $[a,b]$ e si ha:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$$

Ciò significa che si può scambiare l'integrazione con l'operazione di limite:

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n \to \infty} f_n(x)\,dx$$

Vedremo che esistono teoremi di passaggio al limite ben più generali la dimostrazione dei quali richiede la teoria dell'integrazione secondo Lebesgue.