CORSO: Algebra (6 crediti)
Orario lezioni
Mercoledì → 8:30/11:30 (aula C01)
Sabato → 10:30/12:30 (aula F6)

Ricevimento:
(su meil: tortorel@dm.unipi.it)
SITO INTERNET: E-learning

26/09/18

Prodotto scalare:
input = 2 vettori → output = numero.

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n.$$

Norma: dato $\vec{x}$.

$$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \rightarrow \|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

Distanza tra 2 vettori:

$$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \quad \vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$$

$$\text{dista}(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

www.mastercopy.com
master COPY

3/10/18

③ PDF

a) parametrica.

b) cartesiana. ★

$P(1,-2,1)$; $Q(-2,1,-3)$

Trova r?

a) $r = \{P + t(Q-P)\} = \left\{\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-3\\3\\-4\end{pmatrix}\right\} = \begin{pmatrix}1-3t\\-2+3t\\1-4t\end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$

$r : \phi(t)$, $\phi(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ [retta immagine di ϕ].

b) $\begin{cases} x = 1-3t \\ y = -2+3t \\ z = 1-4t \end{cases}$

NB: Linearità

La somma di trasformati è = al trasformato della somma.

★

Osservazione

1) $\langle v \cdot w \rangle = \|v\|\|w\|\cos(\hat{vow}) = \|w\| P(v) = v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3$

2) Equazione piano:

$ax + by + cz = d$

$\langle (a,b,c) \cdot (x,y,z) \rangle = d$

Se $ax + by + cz = 0 \longrightarrow (a,b,c) \perp$ piano

$ax_0 + by_0 + cz_0 = d$

$a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$

★ $\begin{cases} 3t = 1-x \\ y = -2+1-x \\ z = 1 - \frac{4}{3}(1-x) \end{cases}$ $\to$ $\begin{cases} y = -1-x \\ z = -\frac{1}{3} + \frac{4}{3}x \end{cases}$

Allora r in forma cartesiana è

$$r: \begin{cases} x+y+1=0 & 1) \\ \frac{4}{3}x - z - \frac{1}{3} = 0 & 2) \end{cases}$$

r si visualizza come intersezione tra 2 piani.

1) è il 1° piano per:

$(-1, 0, z) \perp a\ (1, 1, 0)$

2) è il 2° piano per:

$\left(0, y, -\frac{1}{3}\right) \perp a\ \left(\frac{4}{3}, 0, -1\right)$.

---

④ PDF

$$* \begin{cases} y - mx = 0 \\ z = m \end{cases}$$

a) Mostra che definiscono una retta.

b) Verifica che $2r^* \Big| \begin{matrix} y - mx = 0 \\ z = m \end{matrix} \Rightarrow$ sghembe.

a) $\begin{cases} y - mx = 0 \end{cases}$ piano per $(0,0,0) \perp a\ (-m, 1, 0)$

$\begin{cases} z - m = 0 \end{cases}$ piano per $(x, y, m) \perp a\ (0, 0, 1)$

$$\begin{cases} x = t \\ y = mx \\ z = m \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = mt \\ z = m \end{cases}$$

Allora:

$$r: \left\{ \begin{pmatrix} p \\ 0 \\ m \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ m \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

b) $\begin{cases} y - mx = 0 \\ z - m = 0 \\ y - mx \\ z - m = 0 \end{cases}$ $(1, m, 0)$ $(1, m, 0)$

$m \neq m$ $\begin{cases} \lambda(1, m, 0) + \mu(1, m, 0) = (0, 0, 0) \\ \lambda^2 + \mu^2 \neq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda m + \mu m = 0 \\ \lambda^2 + \mu^2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \lambda = -\mu \\ \lambda m + \mu m = 0 \\ \mu^2 + \lambda^2 = 0 \end{cases}$ $\longrightarrow m = m$

↓

Le rette sono sghembe.

---

(5) PDF

$\mathbb{R}^3$; $P\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $Q\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $R\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Trovare:

a) forma parametrica.

b) forma cartesiana.

a) $\pi : \{P + t(Q - P) + u(R - P)\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

b) $\pi : \begin{pmatrix} x = 1 - t - u \\ y = 2 + 2t - 3u \\ z = 3 - 3t - u \end{pmatrix}$; $\begin{cases} 2x = 2 - 2t - 2u \\ 2x + y = 2 + 2t - 3u + 2 - 2t - 2u \\ 5z = 15 - 15t - 5u \end{cases}$

$\begin{cases} \rightarrow \\ -5u = 2x + y - 4 \\ 5z = 15 - 15t + 2x + y - 4 \end{cases}$

$$\begin{cases} u = -\frac{1}{5}(2x+y-4) \\ 2x = 2 - 2t + \frac{2}{5}(2x+y-4) \\ 5z = 15 - 15t + 2x + y - 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rightarrow \\ \rightarrow \\ t = \dfrac{2x+y+11-5z}{15} \end{cases}$$

master COPY

Allora:

$$2x = 2 - \frac{2}{15}(2x+y-5z+11) + \frac{2}{5}(2x+y-4)$$

$$2x + \frac{4}{15}x - \frac{4}{5}x + \frac{2}{15}y - \frac{2}{5}y - \frac{10}{15}z = 2 - \frac{22}{15} - \frac{8}{5}$$

$$\frac{22}{15}x - \frac{4}{15}y - \frac{10}{15}z = -\frac{16}{15}$$

$$11x - 2y - 5z = -8$$

Riprova

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-9 \\ -(1-3) \\ 3+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ +2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

---

⑥ PDF

$$\pi : \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad , \quad \pi' : \begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+z=0 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R} \quad ; \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

Sono sghembe?

$$\pi : \begin{pmatrix} x = t \\ y = 1+t \\ z = 2+t \end{pmatrix} \longrightarrow \text{sostituisco in } \pi'$$

$$t + 1 + t + 2 + t = 1 \longrightarrow t = \frac{2}{3}$$

$$t - 1 - t + 2 + t = 0 \quad \text{dato che } 1 \neq -\frac{2}{3}$$

π, π' sghembe