PRINCIPALI DEFINIZIONI

SPAZIO VETTORIALE

È UN INSIEME V (GENERALMENTE TRATTASI DI VETTORI, MATRICI, POLINOMI ECC.)

DOVE SONO DEFINITE L'OPERAZIONI DI SOMMA E DI PRODOTTO E SODDISFANO DIVERSE PROPRIETÀ

$(u+v)+w = u+(v+w)$

$v+w = w+v$

$\lambda(v+w) = \lambda v + \lambda w$

$(\lambda+\mu)v = \lambda v + \mu v$

$(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$

LA SOLUZIONE NULLA $\{0\}$ È APPARTIENE ALLO SPAZIO V

$\forall v \in V \; \exists -v \in V \mid v+(-v) = \vec{0}$

$\forall v \in V \quad 1 \cdot v = v$ e $\vec{0} \cdot v = \vec{0}$

SOTTOSPAZIO VETTORIALE

È UN SOTTO INSIEME DELLO SPAZIO VETTORIALE V

$W \subseteq V$

ed È CHIUSO RISPETTO ALLA SOMMA ed AL PRODOTTO

w_1 e $w_2 \in W \quad \lambda \in \mathbb{K}$

$w_1 + w_2 = w \in W$

$\lambda w \in W$

COMBINAZIONE LINEARE

È UNA n-UPLA DI SOMME, GRAZIE ALLE QUALI POSSO DEFINIRE LO SPAZIO VETORIALE IN OGNI SUO ELEMENTO.

EX.

$N \in V \quad \dim = n$

$N = \alpha_1 N_1 + \dots + \alpha_n N_n$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
cell. 388 9837745

[LINEARE DIP / INDIPE.]

IN UNA COMB LIN DI VETORI DI UNO SPAZIO VETTORIALE LA COMO UN DIP O IND DIPENDE DAI COEFFICIENTI α DEI VETORI

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_k \vec{v}_k = \vec{0}$$

SE GLI $\alpha = 0$ SONO IND.
SE GLI $\alpha \neq 0$ SONO DIP.

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

[BASE SPAZIO VETT]

UN INSIEME DI VETORI $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ IN UNO SPAZIO VETT DI $\dim = k$ SONO BASE SE SONO UN INSIEME DI GENERATORI E LIN-IND.

① $V = \text{SPAN}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k)$ [GENERATORI]

② $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ LIN-IND.

[SOMMA DIRETTA]

DUE SOTTOSPAZI SONO IN SOMMA DIRETTA, SE SOMMANDOLI DEFINISCONO LO SPAZIO VETTORIALE DI APPARTENENZA ED LA LORO INTERSEZIONE È $\{0\}$

$W \subseteq V \quad U \subseteq V \quad \text{TC} \quad U \cap W = \{0\}$

$W \oplus U = V$

[Ker e IMMAGINE] $f : V \to W$

Ker SONO QUEI VET. CHE APPLICANDO LA FUNZIONE VANNO IN ZERO

IMM SONO QUEI VET CHE $\in$ ALL'IMMAGINE DELLA f.

$\text{Ker } f = \{v \in V \mid f(v) = 0\} \subseteq V$

$\text{Imm } f = \{v \in V \mid f(v) = w\} \subseteq W$

PROPRIETÀ MATRICI

- MATRICI TRASPOSTE (SI OTTIENE INVERTENDO RIGHE E COLONNE)

$(\lambda A + \mu B)^T = \lambda A^T + \mu B^T$

$(A^T)^T = A$

$\det A^T = \det A$ [* DIMOSTRAZIONE ** MATRICI ORTOGONALI]

RANGO A = RANGO A^T

$(AB)^T = B^T A^T$

$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

- MATRICE INVERTIBILE (PER CALCOLARLA UTILIZZO GAUSS ALLA MATRICE COMPLETA AI)

SI DICE INVERSA $\iff \det A \neq 0$ (SINGOLARE $\det = 0$, NON SINGOLARE $\det \neq 0$)

$A^{-1} A = I = A A^{-1}$

$(A^{-1})^{-1} = A$

$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$ (TEOREMA BINET $\det(A^{-1} A) = \det I$ $\det A^{-1} \cdot \det A = 1 \iff \frac{1}{\det A} \cdot \det A = 1$ $\frac{\det A}{\det A} = 1$)

$AI \xrightarrow[MD]{GAUSS} IA^{-1}$

$\left(\begin{array}{c|c} \cdots & 1 \cdots \\ \cdots & \cdots 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{c|c} 1 \cdots & \cdots \\ \cdots 1 & \cdots \end{array}\right)$

- MATRICE SIMMETRICA

SI DICE SIMMETRICA SE $A = A^T$ (SIMMETRIA RISPETTO ALLA DIAG. PRINCIPALE: LA RIGA j = COLONNA j, LA COLONNA i = RIGA i)

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$

- SE A È SIMMETRICA, INVERTIBILE $\Rightarrow A^{-1}$ SARÀ SIMMETRICA
- SE A È SIMMETRICA, I SUOI AUTOVALORI SONO REALI.
- IL RANGO DI UNA SIMMETRICA È IL NUMERO DEI SUOI AUTOVALORI NON NULLI.
- GLI AUTOVETTORI CORRISPONDENTI AD AUTOVALORI DISTINTI SONO ORTOGONALI TRA LORO
- OGNI SIMMETRICA È DIAGONALIZZABILE, SE HA COEF. REALI ALLORA È ORTOGONALE.
- LA MATRICE DIAGONALIZZANTE
- $A + A^T = B$ SIMMETRICA.

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

[DIMOSTRAZIONI MATRICI ORTOGONALI]

- SE P È ORTOGONALE ALLORA $\lambda = \pm 1$

λ AUTOVALORE X_λ AUTOVETTORE

$$\langle X, X \rangle = \langle PX, PX \rangle = \langle \lambda X, \lambda X \rangle = \lambda^2 \langle X, X \rangle = \langle X, X \rangle$$

DUNQUE $\lambda^2 = 1$

master COPY COPISTERIA
050/8312126 388/9837745

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

- MATRICI ANTISIMMETRICHE $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & 4 \\ -5 & -4 & 0 \end{pmatrix}$
  $A^T = A^{-1}$
  - SULLA DIAGONALE ELEMENTI NULLI. TRACCIA = 0
  - $\det A \geq 0$ POSITIVO O = A ZERO.
  - $A - A^T = B$ ANTISIMMETRICA

- MATRICI ORTOGONALI
- A ORTOGONALE $\Rightarrow$ $A^TA = AA^T = I$
- $\det(A^TA) = \det(I) \iff \det(A) = \pm 1$
- $\det(A^T) = \det(A)$ [PROP. DET]
  $\det(A)\det(A) = [\det(A^2) = \det I] = \pm 1$
  USO BINET
- SE A È INVERTIBILE $\exists A^{-1}$ TC $AA^{-1} = A^{-1}A = I$
  SE A È ORTOGONALE $\exists A^T$ TC $AA^T = A^TA = I$
  OGNI A ORTOGONALE È INVERTIBILE ($\det = \pm 1$) E L'INVERSA COINCIDE CON LA TRASPOSTA.
  $A^{-1} = A^T$.
- A ORTOGONALE HA: • AUTOVALORI DI MODULO 1
  • AUTOVETTORI ASSOCIATI AD AUTOVALORI DISTINTI, ORTOGONALI.
- LE RIGHE, (O COLONNE) DI A ORTOGONALE DI ORDINE n FORMANO UNA BASE ORTOGONALE DI $\mathbb{R}^n$
- OGNI MATRICE SIMMETRICA PUÒ ESSERE DIAGONALIZZATA DA UNA MATRICE ORTOGONALE.

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745