LEZIONE 1

Per due punti distinti passa una retta
Per tre punti non allineati passa un piano (Euclide).
Posizioni reciproche retta-retta, retta-piano, piano-piano.
Coordinate cartesiane ortogonali.

Equazioni parametriche di rette e piani.
Eliminando i parametri di un piano si ottiene una equazione di grado uno.
Equazioni che differiscano solo per il termine noto rappresentano piani paralleli.
Eliminando il parametro di una retta si ottiene un sistema di due equazioni di grado uno che rappresentano due piani non paralleli la cui intersezione e` la retta.

Una combinazione lineare delle due equazioni rappresenta un piano che passa per la retta.
Tutti i piani del fascio si ottengono in questo modo.

Definizione di vettore come classe di equivalenza di segmenti orientati. Somma di vettori, il vettore nullo proprieta` della somma. Definizione di e_1, e_2, e_3
Proiezioni ortogonali su rette e su piani sono lineari.
Il prodotto scalare e` bilineare. Formula con le coordinate

↓

Quello se rispetta tale PROPRIETÀ, preudo in considerazione v, v_1, v_2 e $a, b \in \mathbb{R}$

1) LINEARITÀ / ADDITIVITÀ

$$F(av_1 + bv_2, v) = aF(v_1, v) + bF(v_2, v)$$

spiegato meglio
- SOMMA $\Rightarrow F(v_1+v_2, v) = F(v_1, v) + F(v_2, v)$
- PRODOTTO $\Rightarrow F(a\cdot(v_1+v_2), v) = Fa(v_1+v_2, v)$

Dimostrata la linearità adesso possiamo a capire cosa mai lo definiamo BI-LINEARE

lineare RISPETTO alla 1° variabile
$F(v_1+v_2, v) = <$ somma prodotto

lineare rispetto alla 2° variabile
$F(v, v_1+v_2) = <$ somma prodotto

Riprendendo la 1° LEZIONE, abbiamo visto che: **LEZIONE 2**

$e_1 = U_1 - O$
$e_2 = U_2 - O$
$e_3 = U_3 - O$
$\vdots$
$e_n = U_n - O$

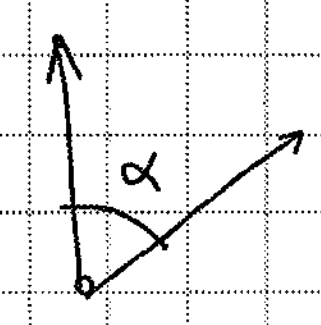
⇒ segmenti orientati, ovvero VETTORI in piano il primo estremo parte da zero

Ad esempio se si prende un punto $P \in$ Spazio si scriverà $P - O = X_1 e_1 \cdots X_n e_n$
Quindi possiamo pensare P con le sue COORDINATE $P = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$

Anche con il PRODOTTO SCALARE valgono le stesse regole, prendiamo due vettori

$v_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ diremo che $\left[\langle v_1, v_2 \rangle = \text{lunghezza } v_1 \cdot \text{lunghezza } v_2 \cdot \cos\alpha \right]$

2 vettori nello spazio si giacciono su un piano da loro generato



Facendo rif. alla 1° LEZIONE possiamo dire che tale prodotto scalare è uguale
$= a_1 b_1 + a_2 b_2 \dots\dots a_n b_n$. Basta
1) scrivere i vettori come combinazione lineare
2) Dimostrare che il P. SCALARE è COMMUTATIVO (per definizione) ed è LINEARE in ogni variabile, cioè il prodotto scalare della somma dei due vettori, sarà la somma dei 2 prodotti scalari, ed altre proprietà

cioè: $\langle v_1 + v_2, w \rangle = \langle v_1, w \rangle + \langle v_2, w \rangle$

→ $\langle a v, w \rangle = a \langle v, w \rangle$
→ $\langle v, v \rangle = 1$ poiché $\cos 0° = 1$

concetto di ORTOGONALITÀ → $\langle v, w \rangle = 0$ se $v \perp w$!!

IPERPIANO: luogo di zeri di equazioni di grado 1, del tipo
$a_1 x_1 \dots a_n x_n = b$

l'ortogonale per un iperpiano passa per un punto fuori dall'iperpiano ed è una retta, quindi un altro IPERPIANO

R^1 = n° reali ; R^2 = piano ⟶ $R^{n \geq 3}$ = IPERPIANI

Concetto di
- INDIPENDENZA lineare → se $a_1 v_1 + \cdots a_n v_n = 0 \Rightarrow a_1 = \cdots = a_n = 0$
- DIPENDENZA lineare → se $\exists\ a_1 \dots a_n$ non tutti nulli tali che $a_1 v_1 + \dots a_n v_n = 0$ e posso ricavare v_n

SISTEMI LINEARI $\Rightarrow$ $\boxed{ax = b}$ dove a, b sono n° reali $\in \mathbb{R}$

1° discussione:

$a \neq 0 \rightarrow x = \frac{b}{a}$

$a = 0 \rightarrow 0x = b$ $\begin{cases} b \neq 0 \Rightarrow \text{soluzioni } \emptyset \text{ non esiste} \\ b = 0 \Rightarrow \text{ogni n° reale è soluzione} \end{cases}$

Un sistema lineare si presenta con questa altra forma:

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots a_{1q} \cdot x_q = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots a_{2q} \cdot x_q = b_2 \\ \vdots \\ a_{p1} x_1 + a_{p2} \cdot x_2 + \dots a_{pq} x_q = b_p \end{cases}$$

(a_{11}: 1° riga, 1° colonna)

Una soluzione è una q-upla di numeri $\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_q \end{pmatrix}$ tale che se la sostituisco nella 1° equazione a $x_1 \dots x_q$ trovo b_1, nella 2° equazione b_2 cioè trovo il termine noto.

Per le soluzioni $\rightarrow$ OSSERVAZIONE:
prendendo la 1° equazione ho un'eq. di 1° grado con q = variabili quindi rappresenterà un IPERPIANO di $\mathbb{R}^q$

e sarà un oggetto di $(q-1)$ dimensione { in quanto sono gli elementi di $\mathbb{R}^q$ che verificano le equazioni di 1° grado. }

Ogni equazione la posso pensare come un iperpiano in $\mathbb{R}^q$ e quindi quando io vado a studiare sistema / matrice non vado che a cercare l'INTERSEZIONE di p = iperpiani (equazioni).

esempio: $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 + \pi x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = e^{\pi} \end{cases}$ sistema in 2 equazioni $= p$, in 4 incognite $= q$

il sistema dipende dai coefficienti $\boxed{a_{ij}}$ e dai termini noti $(b_1 \dots b_p)$, non dalle variabili (scrivo le stesse sono) posizione degli elementi in un sistema

$\downarrow$

ELEMENTI che compongono MATRICE $M(r \times c)$

Se $\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_q \end{pmatrix}$ è una soluzione vuol dire che se faccio una combinazione lineare delle colonne di questa matrice con le colonne C stesso $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$

cioè $C_1 \cdot A^1 + C_2 \cdot A^2 + \dots C_q A^q = b$

$\downarrow$

quindi C = è SOLUZIONE

$$\left(\begin{array}{c|ccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1q} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2q} & b_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pq} & b_p \end{array}\right)$$

q = n° delle INCOGNITE (RIGA)

p = n° delle EQUAZIONI (COLONNA)

termini noti

MATRICE DEI COEFFICIENTI e dei termini noti

gruppo soluzioni $S = \{ x \in \mathbb{R}^q \mid Ax = B \text{ dove } B \in \mathbb{R}^p \}$

METODO DI GAUSS → cop 3 ⇒ sistemi quadrati / cop 6 ⇒ sistemi rettangolari

Consideriamo matrice A (p RIGHE $\times$ q COLONNE) dove $\begin{cases} A^i = i\text{-esima COLONNA} \\ A_j = j\text{-esima RIGA} \end{cases}$

2 tipi di mosse

- SCAMBIO DI EQUAZIONI: dato da S è un iperpiano che si forma dall'intersezione di p-iperpiani non è importante l'ordine delle equazioni.
- SOSTITUISCO A_i con $A_i + K A_j$ dove $A_i \neq A_j$

Queste mosse NON cambiano l'insieme S delle soluzioni

Conseguenze:

Se $a_{11} \neq 0$ le righe $A_j - \frac{a_{j1}}{a_{11}} A_1$ → cominciano tutte con ZERO, così via dicendo per tutte le righe che iniziano con un $a_{ij} \neq 0$. Se trovo una colonna/riga solo di zeri passo a quella successiva e applico le mosse

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1q} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2q} \\ \vdots & 0 & a_{33} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

Arriviamo a quello che viene def. MATRICE A SCALA dove gli elementi a_{nn} cioè i primi $n° \neq 0$ presenti nelle righe prendono il nome di PIVOTS
Porto al primo membro i PIVOTS e le variabili $\neq$ dei PIVOTS al secondo

$$\begin{aligned} &1° EQ. \quad a_{11}x_1 + a_{1i}x_i + a_{i+1}x_{i+1} + a_{1j}x_j = q_1 \\ &2° EQ. \quad a_{2i}x_i + a_{2(i+1)}x_{i+1} + a_{2j}x_j = q_2 \\ &3° EQ. \quad + a_{3(i+1)}x_{i+1} + a_{3j}x_j = q_3 \\ &4° EQ. \quad + a_{4j}x_j = q_4 \end{aligned}$$

→ Arrivo così ad un punto in cui riesco a trovare una variabile e da essa a trovare tutte le altre a ritroso riuscendo così a calcolare $\begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_q \end{pmatrix}$ le soluzioni del mio sistema

cioè $x_j = \frac{q_4}{a_{4j}}$ SOST 3° EQ.

$x_{i+1} = \ldots$ SOST 2° EQ.

$x_i = \ldots$ SOST 1° EQ.

$x_1 =$ completato

fino ad ottenere le soluzioni del mio sistema.

Se qualche termine noto = 0 e delle variabili pure → SISTEMA senza soluzioni

Esempio: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4 = 21 \\ -x_1 + 2x_2 + 7x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow A = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & 1 & 21 \\ -1 & 2 & 7 & -1 & 0 \end{array}\right)$

Applichiamo le mosse per semplificare la matrice A.

$$A_2 - 3A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & ; & 1 \\ 0 & -4 & 2 & -2 & ; & 18 \\ 0 & 2 & 8 & -3 & ; & 1 \end{pmatrix}$$
$$A_3 + A_1 =$$

Scambiamo A_2 con A_3

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & ; & 1 \\ 0 & 2 & 8 & -3 & ; & 1 \\ 0 & -4 & 2 & -2 & ; & 18 \end{pmatrix}$$

$$A_3 + 2A_2 = \begin{pmatrix} \textcircled{1} & 1 & 1 & 1 & ; & 1 \\ 0 & \textcircled{2} & 8 & -3 & ; & 1 \\ 0 & 0 & \textcircled{16} & -8 & ; & 20 \end{pmatrix}$$

PIVOTS, adesso posso salire giù a questa semplificazione

$$\begin{cases} X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 1 \\ 2X_2 + 8X_3 - 3X_4 = 1 \\ 16X_3 - 8X_4 = 20 \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{l} X_1 = \text{ecc. ecc.} \\ X_2 = \frac{1}{2} - (4X_4 + 10) + 3X_4 \quad \text{so ST} \\ X_3 = \frac{1}{2}X_4 + \frac{5}{4} \quad \text{so ST} \end{array}$$

Sistema di $\begin{bmatrix} p = \text{EQUAZIONI} = 3 \\ q = \text{INCOGNITE} = 4 \end{bmatrix}$, mi ritrovo 3 PIVOTS = 3 variabili DIPENDENTI
1 = variabile LIBERA (X_4)

questo mi dice che $\boxed{\infty^{q-p}} = \infty^1 =$ ho INFINITE soluzioni $\forall$ valore di X_4

le variabili libere sono quelle NON portatrici di PIVOTS.

master copy