1) Spazio vettoriale:
Uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ è un insieme V su cui sono definite due operazioni somma e prodotto che soddisfano determinate proprietà:

- $\forall u, v \in V,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
  1. $(u+v)+w = u+(v+w)$
  2. $v+w = w+v$
  3. $\lambda(v+w) = \lambda v + \lambda w$.
  4. $(\lambda+\mu)v = \lambda v + \mu v$.
  5. $(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$
  6. $\exists 0 \in V \mid v+0 = 0+v = v$
  7. $\forall v \in V\ \exists -v \in V \mid v+(-v) = 0$
  8. $\forall v \in V\ \ 1 \cdot v = v$ e $0 \cdot v = 0$.

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

2) Sottospazio vettoriale:
È un sottinsieme $W \subseteq V$, chiuso rispetto alla somma e al prodotto ovvero:
1. $w_1 + w_2 \in W$.
2. $\lambda w \in W$.

3) Span di k vettori:
È l'insieme di tutte le possibili combinazioni di $v_1, \dots, v_k$.
$$\text{span}(v_1, \dots, v_k) = \{\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k \mid \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}\}.$$

4) Lineare indipendenza:
Un insieme di $v_1, \dots, v_k$ vettori di V si dice linearmente indipendente se $\exists$ una combinazione lineare: $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = 0$ con $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$.

5) Base:
Un insieme $\mathcal{B}\{v_1, \dots, v_k\}$ di vettori di V è una base di V se:
1. $V = \text{Span}(v_1, \dots, v_k)$
2. $v_1, \dots, v_k$ sono vettori L.I.

6) Coordinate di V in base:
Sia $\mathcal{B}\{v_1, \dots, v_n\}$ base di V, e $v \in V$.
Gli n numeri $\mathbb{R}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \mid V = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$ sono le coordinate di v rispetto alla base $\mathcal{B}$.

NB:
Base: $\begin{cases} - \text{ insieme minimale di generatori.} \\ - \text{ insieme massimale di L.I.} \end{cases}$

7) Somma diretta:
$U, W \subseteq V$, se $U \cap W = \{0\} \longrightarrow \dim U + \dim W = \dim(U+W)$.

NB:
Si dicono supplementari se $V = U \oplus W$.

8) Applicazione lineare:
Un'applicazione lineare fra due spazi vettoriali V, W è una funzione $T: V \to W$.
1. $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$, $\forall v_1, v_2 \in V$.
2. $T(\lambda v) = \lambda T(v)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ e $v \in V$.

9) $\text{Ker}\, T$ e $\text{Im}\, T$

$\text{Ker}\, T: \{ v \in V \mid T(v) = 0 \} \subseteq V$.

$\text{Im}\, T: \{ T(v) = w \mid v \in V \} \subseteq W$.

NB
$\text{Im}\, T = W \Leftrightarrow T$ è surgettiva.
$\text{Ker}\, T = 0 \Leftrightarrow T$ è iniettiva.

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

10) Rango:
È la dimensione dello span delle colonne.
$r_K A = \dim \text{span}(A^1, \dots, A^n)$.

11) Matrici e applicazioni:
$A_{p \times q} \iff A : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^p$.

12) Matrice associata:
Nella colonna j-esima di A, ci sono le coordinate rispetto a $\mathcal{B}_C$ dell'immagine rispetto a T di un vettore della base $\mathcal{B}_A$.

$$[T]_{\mathcal{B}_C}^{\mathcal{B}_A} = A.$$

13) Polinomio e diagonalizzabilità:
T è diagonalizzabile $\iff$ il pol p che ha tutte le radici $\in \mathbb{K}$ e distinte $\iff p$ e p' (suo derivato) non hanno fattori comuni.

www.mastercopy 050/8312126 388/9337745


master
COPY
COPISTERIA
050/8312126 388/9837745

1) Sia V uno spazio vett. e $v_1, \dots, v_k$ vettori di V. Allora $\text{span}(v_1, \dots, v_k)$ è un sottospazio di V.

DIM: Dobbiamo dimostrare che tale span è chiuso rispetto alla somma e al prodotto.
Per particolare che la somma di 2 combinazioni lineari è una comb. lineare di $v_1, \dots, v_k$ vettori, e analogamente che uno scalare $\in \mathbb{R}$ per una comb. lineare dà come risultato una comb. lineare.

Allora:

1) $(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k) + (\beta_1 v_1 + \dots + \beta_k v_k) =$

$= (\alpha_1 + \beta_1) v_1 + \dots + (\alpha_k + \beta_k) v_k \in \text{span}(v_1, \dots, v_k)$.

2) $\lambda(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k) = \lambda\alpha_1 v_1 + \dots + \lambda\alpha_k v_k =$

$= (\lambda\alpha_1) v_1 + \dots + (\lambda\alpha_k) v_k \in \text{span}(v_1, \dots, v_k)$.

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

---

2) Sia $Ax = b$, un sistema m eq n incognite e siano $A^1, \dots, A^n$ le colonne $\in \mathbb{R}^m$ della matrice dei coefficienti $\Rightarrow$ il sistema è compatibile $\Leftrightarrow b \in \text{span}(A^1, \dots, A^n)$

DIM:
Se posso scrivere il sistema come:
$x_1 A^1 + \dots + x_n A^n = b$: significa che b è combinazione lineare delle colonne di A. Quindi $b \in \text{span}(A^1, \dots, A^n)$.

#