FORMULA STOKES (l'orientazione deve essere tale che la superficie sia sempre a sinistra con la testa dalla parte della n

COSA È IL FLUSSO

INVERTIBILITÀ LOCALE

UN TEOREMA DI PASSAGGIO AL LIMITE: BEPPO LEVI, LEBESGUE, FOUTOU

CONVERGENZA UNIFORME

↓

DERIVABILITÀ (in genere non è preservata, ma lo è se aggiungo delle ipotesi)

CONVERGENZA DOMINATA (IPOTESI)

SUPERFICI (TUTTO QUELLO CHE SAI)
- area (condizione necessaria) (il prodotto vettoriale tra i vettori deve essere ≠0 così generano un piano)
- orientazione (il vettore normale deve variare con continuità)
- qual è la cosa che devono soddisfare i vettori affinché siano coerenti (devono percorrere il bordo in modo che la superficie sia a sinistra)

SERIE DI FUNZIONI
- tipi di convergenza: totale, uniforme

SERIE DI POTENZE

CURVE (TUTTO QUELLO CHE SAI)
- chiuse
- equivalenti (a cosa servono)
- lunghezza

INTEGRALE CURVILINEO

TEOREMA DEL DINI + DIMOSTRAZIONE N=2 (vedere bene la Jacobiana, il rango, il prodotto tra matrici)

MISURA ESTERNA DI LEBESGUE
- misura esterna del singolo punto (è zero)
- proprietà che discendono dalla misura esterna

CONVERGENZA UNIFORME SUCCESSIONI
- differenza con la puntuale
- dove la perdo usare l'uniforme?
- integrabilità - passaggio al limite

MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE

COORDINATE POLARI

CAMPI VETTORIALI
- campi con divergenza nulla

ESEMPIO CONVERGENZA PUNTUALE NON UNIFORME

TEOREMA DELLA DIVERGENZA

TEOREMA DI BEPPO LEVI (O CONV. MONOTONA)

FUBINI-TONELLI (è un modo di decomporre gli integrali doppi)

COSA È IL ROTORE DI UN CAMPO VETTORIALE CONSERVATIVO

FUNZIONI MISURABILI

CONVERGENZA TOTALE

COS'È UNA FUNZIONE SEMPLICE

INSIEMI MISURABILI

MISURA DI LEBESGUE E PROPRIETÀ

LAVORO CAMPO CONSERVATIVO

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

FUNZIONI $f: A \to B$

iniettiva: se ogni elemento di B è immagine di al più un elemento di A
suriettiva: " " " " di almeno " "
biiettiva: se è sia iniettiva che suriettiva

crescente: si dice crescente in senso stretto in un intervallo I, sottoinsieme di D, se comunque scelti x_1 e x_2 appartenenti a I, con $x_1 < x_2$ risulta $f(x_1) < f(x_2)$
decrescente: si dice decrescente (...) se comunque scelti x_1 e x_2 appartenenti a I, con $x_1 < x_2$ risulta $f(x_1) > f(x_2)$
monotona: si dice monotona in senso stretto in un intervallo I, sottoinsieme di D se in quell'intervallo è sempre crescente o decrescente (una f monotona in senso stretto è sempre iniettiva)

continua in un punto: f definita in un intervallo [a,b], x_0 punto interno all'intervallo. Si dice continua in x_0 quando esiste il limite di f x per $x \to x_0$ e tale limite è uguale al valore $f(x_0)$ della funzione calcolata in x_0: $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
teorema di Weierstrass: se f è una funzione continua in un intervallo limitato e chiuso, allora assume in tale intervallo il massimo e minimo assoluto.
teorema dei valori intermedi: se f è una funzione continua in un intervallo limitato e chiuso, allora assume almeno una volta tutti i valori compresi tra il massimo e il minimo
teorema di esistenza degli zeri: se f è una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato e negli estremi di tale intervallo assume valori di segno opposto, allora esiste almeno un punto c, nell'intervallo, in cui f si annulla.
punto di discontinuità di prima specie: un punto x_0 si dice (...) per la funzione f(x) quando per $x \to x_0$, il limite destro e sinistro sono finiti ma diversi. La differenza fra i limiti si chiama salto.
punto di discontinuità di seconda specie: (...) quando almeno uno dei due limiti di f(x) è ∞ o non esiste.
punto di discontinuità di terza specie: (...) quando esiste ed è finito il limite di f(x) per $x \to x_0$, e quando f non è definita in x_0, o se lo è risulta $f(x_0) \neq l$.

LIMITI

un insieme è detto:
- **superiormente limitato** se è possibile determinare un numero reale α non necessariamente appartenente all'insieme, tale che $x \leq \alpha \ \forall x \in F$; il numero α è detto maggiorante di F(insieme)
- **inferiormente limitato**, se è possibile determinare un numero reale β, non necessariamente appartenente a F, tale che $x \geq \beta \ \forall x \in F$; il numero β è detto minorante di F.
- **limitato** se è limitato sia superiormente che inferiormente

estremo superiore: dato un insieme E superiormente limitato, si dice estremo superiore di E quel numero reale M, se esiste, tale che: $x \leq M \ \forall x \in E$; $\forall \varepsilon > 0$ è possibile trovare almeno un elemento $x \in E$ maggiore di $(M - \varepsilon)$ se un insieme è illimitato superiormente, il suo estremo superiore è $+\infty$;
estremo inferiore: (...) si dice estremo inferiore di E quel numero reale L, se esiste, tale che: $x \geq L \ \forall x \in E$, $\forall \varepsilon > 0$ è possibile trovare almeno un elemento $x \in E$ minore di $(L + \varepsilon)$; se un insieme è illimitato inferiormente si dice che il suo estremo inferiore è $-\infty$.
Completezza dell'insieme R: ogni sottoinsieme di numeri reali limitato superiormente o inferiormente ammette estremo superiore o inferiore
punto di accumulazione: si dice che il numero reale x_0 è un punto di accumulazione di A sottoinsieme di R, se ogni intorno completo di x_0 contiene infiniti punti di A.
limite finito per $x \to x_0$: f(x) ha per limite il numero reale l per $x \to x_0$ quando comunque si scelga un numero reale positivo ε si può determinare un intorno completo I di x_0 tale che risulti $|f(x) - l| < \varepsilon$ $\forall x \in I$, diverso (al più) da x_0; spesso si prende come intorno di x_0 un intorno circolare $I_\delta(x_0)$ e la definizione si formula così: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0$ tale che $\forall x$ con $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$, $|f(x) - l| < \varepsilon$
da definizione dice che, fissato un ε qualsiasi, troviamo sempre un intorno di x_0 tale per cui x di quell'intorno $f(x)$ appartiene a $]l - \varepsilon; l + \varepsilon[$, cioè $f(x)$ è molto vicino a l.
limite $+\infty$ per $x \to x_0$: sia f(x) una funzione non definita in x_0. Si dice che f(x) tende a $+\infty$ per $x \to x_0$ quando per ogni numero reale positivo M si può determinare un intorno completo I di x_0 tale che risulti: $f(x) > M \ \forall x \in I$ e diverso da x_0; in questo caso la funzione f diverge positivamente
limite $-\infty$ per $x \to x_0$: sia f(x) una funzione non definita in x_0. Si dice che f(x) tende a $-\infty$ per $x \to x_0$ quando per ogni numero reale positivo M si può determinare un intorno completo I di x_0 tale che risulti $f(x) < -M \ \forall x \in I$ diverso da x_0; la funzione diverge negativamente.

limite finito per $x \to +\infty$: si dice che $f(x)$ tende ad l per $x \to +\infty$ quando comunque si prenda un numero reale positivo ε si può determinare un intorno I di $+\infty$ tale che: $|f(x) - l| < \varepsilon \quad \forall x \in I$. Considerato che un intorno di $+\infty$ è costituito da tutti gli x maggiori di un numero reale c, possiamo dire che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$ se: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists c > 0 : \forall x > c, |f(x) - l| < \varepsilon$

limite finito per $x \to -\infty$: si dice che $f(x)$ ha limite reale l per $x \to -\infty$ se per ogni $\varepsilon > 0$ fissato è possibile trovare un intorno I di $-\infty$ tale che risulti: $|f(x) - l| < \varepsilon \quad \forall x \in I$.

limite $+\infty$ per $x \to +\infty$: $f(x)$ ha per limite $+\infty$ per $x \to +\infty$ quando per ogni numero reale positivo M si può determinare un intorno I di $+\infty$ tale che risulti: $f(x) > M \quad \forall x \in I$.

limite $+\infty$ per $x \to -\infty$: $f(x)$ ha per limite $+\infty$ per x che tende a $-\infty$ quando per ogni numero reale positivo M si può determinare un intorno I di $-\infty$ tale che risulti: $f(x) > M \quad \forall x \in I$

limite $-\infty$ per $x \to +\infty$: $f(x)$ ha per limite $-\infty$ per $x \to +\infty$ quando per ogni numero reale positivo M si può determinare un intorno I di $+\infty$ tale che risulti $f(x) < -M \quad \forall x \in I$.

limite $-\infty$ per $x \to -\infty$: $f(x)$ ha per limite $-\infty$ per $x \to -\infty$ quando per ogni numero reale positivo M si può determinare un intorno I di $-\infty$ tale che risulti $f(x) < -M \quad \forall x \in I$

teorema di unicità del limite: se per $x \to x_0$, $f(x)$ ha per limite l, tale limite è unico. Hp: $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$; $l \in \mathbb{R}$
Th: l è unico

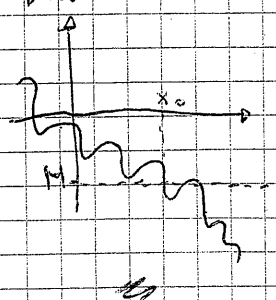
teorema della permanenza del segno: se il limite di una funzione per $x \to x_0$ è un numero l diverso da 0, allora esiste un intorno I di x_0 in cui $f(x)$ ed l sono entrambi positivi o negativi. Hp: $\lim f(x) = l$; $l > 0$
Th: $f(x) > 0$ in un intorno di x_0
Questo teorema non è valido nel caso in cui il limite l sia uguale a 0.

teorema del confronto: siano $b(x)$, $f(x)$, $g(x)$ tre funzioni definite nello stesso dominio $D \subseteq \mathbb{R}$ escluso al più un punto x_0. Se in ogni punto diverso da x_0 del dominio risulta: $b(x) \leq f(x) \leq g(x)$ e il limite delle due funzioni $b(x)$ e $g(x)$ per $x \to x_0$ è uno stesso numero l, allora anche il limite di $f(x)$ per $x \to x_0$ è uguale a l. Hp: $b(x) \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in D$; $\lim_{x \to x_0} b(x) = l$; $\lim_{x \to x_0} g(x) = l$. Th: $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$

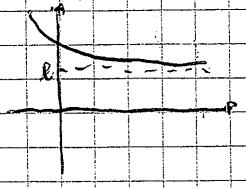
SUCCESSIONI $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \to a_n$

crescente: se ogni termine è maggiore del suo precedente $a_n < a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
decrescente: " minore " " $a_n > a_{n+1}$ "
limitata superiormente: se tutti i suoi termini risultano minori o uguali di un numero reale M, $a_n \leq M$
limitata inferiormente: " " " maggiori " " m, $a_n \geq m$ "
limitata: quando è limitata superiormente e inferiormente, $m \leq a_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$
limite $+\infty$ per $n \to +\infty$: la successione ha per limite $+\infty$ quando, fissato un numero M positivo, è possibile determinare un corrispondente numero p_M positivo tale che $a_n > M \quad \forall n > p_M$; diverge positivamente
limite $-\infty$ per $n \to +\infty$: (...) quando fissato M, è possibile determinare p_M tale che: $a_n < -M \quad \forall n > p_M$; diverge negativamente
limite finito per $n \to +\infty$: (...) ha per limite il numero reale l quando fissato ad arbitrio un numero ε positivo, è possibile determinare un corrispondente numero p_ε positivo tale che: $|a_n - l| < \varepsilon \quad \forall n > p_\varepsilon$.
Poiché $\mathbb{N}$ non ammette punti di accumulazione n non può tendere ad un punto ma solo a $+\infty$.
teorema di unicità del limite: se il limite di a_n per $n \to +\infty$ è l ($l \neq +\infty$ e $-\infty$), tale limite è unico
teorema della permanenza del segno: se il limite di a_n per $n \to +\infty$ è $l \neq 0$, da un certo indice in poi tutti i termini della successione sono concordi con l; $\exists p \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n > p$, a_n e l hanno lo stesso segno
teorema del confronto: date a_n, b_n tali che $a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$, allora se $\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$, anche b_n tende a $+\infty$ per $n \to +\infty$ e se $\lim_{n \to +\infty} b_n = -\infty$ anche a_n tende a $-\infty$ per $n \to +\infty$.

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$



$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$



Tel. 050 831 2126
Cell. 389 9837745

DERIVATA

Affinché f sia derivabile in un punto è necessario che siano verificate queste condizioni:

1. la funzione è definita in un intorno del punto
2. esiste il limite del rapporto incrementale, relativo al punto, per h che tende a zero, cioè esiste il limite destro e il limite sinistro di tale rapporto ed essi coincidono
3. questo limite è un numero finito

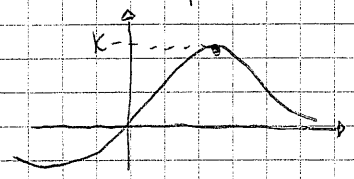
teorema di Cauchy: se le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ sono continue nell'intervallo $[a,b]$, derivabili in ogni punto interno a questo intervallo e inoltre in $]a,b[$ è sempre $g'(x) \neq 0$, esiste almeno un punto c interno ad $[a,b]$ in cui si ha:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

cioè il rapporto fra gli incrementi delle funzioni $f(x)$ e $g(x)$ nell'intervallo $[a,b]$ è uguale al rapporto fra le rispettive derivate calcolate in un particolare punto c interno all'intervallo.

$f: A \to B$

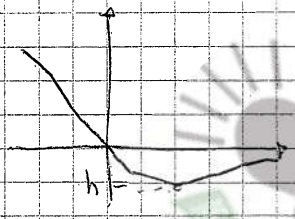
f è limitata superiormente se: $\exists K \in \mathbb{R}: f(x) \leq K \quad \forall x \in A$



la funzione è sempre sotto K

$f: A \to B$

f è limitata inferiormente se: $\exists h \in \mathbb{R}: f(x) \geq h \quad \forall x \in A$



la funzione sta sempre sopra h

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Copisteria
www.mastercopy.it
050/8312126 388/9837745

Se una funzione è continua in un punto, può essere derivabile

Se una funzione è derivabile in un punto è continua nel punto

FUNZIONE SEMPLICE:

Sono funzioni che approssimano bene le misurabili. Sono usate nello sviluppo della teoria dell'integrazione di Lebesgue perché è facile creare una definizione di integrale per funzioni semplici ed è molto semplice approssimare funzioni generali con una successione di funzioni semplici.

Formalmente è una combinazione lineare finita di funzioni indicatrici di insiemi misurabili.

Ogni funzione misurabile non negativa $f: X \to \mathbb{R}^+$ è il limite puntuale di una successione monotona crescente di funzioni semplici non negative.

www.mostacoay.com COPISTERIA 050/8312126 388/9837745