ALFABETO GRECO

α	A	ALFA	ι	I	IOTA	ρ	P	RO
β	B	BETA	κ	K	CAPPA	σ	Σ	SIGMA
γ	Γ	GAMMA	λ	Λ	LAMBDA	τ	T	TAU
δ	Δ	DELTA	μ	M	MI	υ	Y	IUPSILON
ε	E	EPSILON	ν	N	NI	φ	Φ	FI
ζ	Z	ZETA	ξ	Ξ	CSI	χ	X	CHI
η	H	ETA	o	O	OMICRON	ψ	Ψ	PSI
ϑ	Θ	TETA	π	Π	PI	ω	Ω	OMEGA

INSIEMI = collezione di elementi

- può essere finito o infinito
- si descrive per: ELENCAZIONE degli ELEMENTI
  PROPRIETÀ p(x)

- SIMBOLI:
  - $x \in A$ (APPARTENENZA)
  - $A \subseteq B$ A CONTENUTO IN B $(\forall a \in B)$
  - $A = B$ $\forall a = \forall b$
  - $A \subset B$ A È SOTTOINSIEME DI B (A NON COINCIDE CON B)
  - $A \neq B$ DIVERSO
  - $A \cup B$ UNIONE $\Rightarrow = B \cup A$
  - $A \cap B$ INTERSEZIONE $\Rightarrow = B \cap A$ se $= \emptyset$ A, B SONO disgiunti
  - $A \setminus B$ DIFFERENZA $\Rightarrow \neq B \setminus A$
  - $A^c = X \setminus A$ COMPLEMENTARE DI A IN X (insieme universo)
  - $\emptyset$ INSIEME VUOTO

- INSIEMI DEI NUMERI $\boxed{\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}}$

$\mathbb{N}$	NATURALI	$\{0, 1, 2, \dots\}$
$\mathbb{Z}$	INTERI	$\{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$
$\mathbb{Q}$	RAZIONALI	$\{p/q : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$
$\mathbb{R}$	REALI	
$\mathbb{C}$	COMPLESSI	$\{a + ib : a, b \in \mathbb{R}, i = \text{unità immaginaria} \notin \mathbb{R}\}$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

PRODOTTO CARTESIANO $X \times Y$

Dati due insiemi X e Y, il prodotto cartesiano è l'insieme di tutte le coppie (x, y) con $x \in X$ e $y \in Y$.

NB se $X = Y \Rightarrow X \times Y = X^2 \Rightarrow \forall (x, y) \neq (y, x) \in X^2$

FUNZIONI = CORRISPONDENZA FRA DUE INSIEMI X E Y, IN CUI AD OGNI ELEMENTO $x \in X$ VIENE ASSOCIATO UNO E UN SOLO ELEMENTO $y \in Y$

$f: X \to Y$

↳ f È DEFINITA SU X A VALORI IN Y.

X = dominio di f
$f(X)$ = codominio di f

- G_f = GRAFICO della FUNZIONE f = È IL SOTTOINSIEME del PRODOTTO CARTESIANO $X \times Y$, È COSTITUITO da tutte le coppie $(x, f(x)) = (x, y) \in X \times Y$ che risolvono $y = f(x)$.

- **FUNZIONE COMPOSTA** $g \circ f: X \to Z \Rightarrow g \circ f = g(f(x)) \ \forall x \in X$ e $f(x) \subset Z$

- **FUNZIONE INIETTIVA** $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$
  A DIVERSI PUNTI SI ASSOCIANO DIVERSE IMMAGINI

- **FUNZIONE SURGETTIVA** $f(X) = Y \Rightarrow \forall y \in Y$ È IMMAGINE DI ALMENO UN $x \in X$

- **FUNZIONE BIGETTIVA** $\boxed{\forall y \in Y \ \exists! x \in X \mid f(x) = y}$ per ogni y esiste un unico x tale che $f(x) = y$

⇓

FUNZIONE INVERSA $f^{-1}: Y \to X$
$\forall y \in Y$ associa quell'unico x per cui $f(x) = y$

$\Rightarrow f^{-1} \circ f = I_X \ \wedge \ f \circ f^{-1} = I_Y$

↳ FUNZIONI IDENTITÀ SU X E Y: $I_X(x) = x \ \forall x \in X$
$I_Y(y) = y \ \forall y \in Y$

MASTER COPY
Tel. 050 0312126
Cell. 328 6577745

1- PRELIMINARI
2- LIMITI E I.C.
3- CALCOLO DIFFERENZIALE (DERIVATE E STUDIO DI FUNZIONE)
4- CALCOLO INTEGRALE

FUNZIONI TRA INSIEMI

Cos'è una funzione?

OPERATIVAMENTE sono 3 cose:
- un insieme di partenza A
- un insieme di arrivo B
- una "Legge" che ad ogni elemento $a \in A$ associa un unico elemento $b \in B$, che si indica con $f(a)$.

FUNZIONE: $f: A \to B$

Il grafico di una funzione è un sottoinsieme di $A \times B$ definito:

$$\text{Grafico}(f) := \{(a,b) \in A \times B : b = f(a)\}$$

DEFINIZIONE FORMALE DI FUNZIONE

Dati due insiemi $A \neq B$, una funzione $f: A \to B$ è un qualunque sottoinsieme $G \subseteq A \times B$ t.c. $\forall a \in A \ \exists! b \in B \mid (a,b) \in G$

(Tradotto: una funzione è il suo grafico)

COMPOSIZIONE DI FUNZIONI

Data una $f: A \to B$ e data $g: B \to C$ (formalmente devono essere uguali) si definisce la funzione composta $g \circ f: A \to C$ definita come:

$$(g \circ f)(a) = g(f(a))$$

(La funzione più interna (f) è quella che si fa prima)

$f: A \to B$ — formalmente è $G_f \subseteq A \times B$

$g: B \to C$ — $G_g \subseteq B \times C$

$g \circ f: A \to C$ — $G_{g \circ f} \subseteq A \times C$

$$G_{g \circ f} = \{(a,c) \in A \times C \mid \exists b \in B : (a,b) \in G_f \wedge (b,c) \in G_g\}$$

(Traduzione: b è $f(a)$, cioè $f(a)$ sta nel grafico di f e $f(a,c)$ sta nel grafico di g)

ora bisogna dimostrare che $\forall a \in A \ \exists! c \in C \mid (a,c) \in G_{g \circ f}$

$f: A \to B$ è:

- INIETTIVA se $\forall a_1, a_2 \in A, a_1 \neq a_2 \implies f(a_1) \neq f(a_2)$ (tradotto: mando cose diverse in cose diverse)
- SURGETTIVA se $\forall b \in B \ \exists a \in A \mid f(a) = b$ (tutto B è raggiunto dalla funzione)
- BIGETTIVA

f^{-1} INVERSA DI $f: A \to B$ è una funzione $f^{-1}: B \to A$ t.c. $g(f(a)) = a \ \forall a \in A$ (INV. A SX) e $f(g(b)) = b \ \forall b \in B$ (INV. A DX)

f è INVERTIBILE (cioè esiste l'inversa) $\iff f$ è BIGETTIVA (cioè se parto da A e vado in B e voglio tornare in A allora f è iniettiva, se da B vado in A e voglio tornare in B allora deve essere surgettiva (rispettivamente INV A SX e A DX))

INIETTIVITÀ E SURIETTIVITÀ CON LA COMPOSIZIONE

se f, g sono iniettive $\Rightarrow$ $g \circ f$ è iniettiva

DIM Presi $a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2) \Rightarrow g(f(a_1)) \neq g(f(a_2))$
(f. iniettiva; g. iniettiva)

se f, g sono suriettive $\Rightarrow$ $g \circ f$ è suriettiva

DIM $\forall c \in C \Rightarrow \exists b \in B \mid g(b) = c \Rightarrow \exists a \in A \mid f(a) = b \Rightarrow g(f(a)) = g(b) = c$
(g. surg; f. surg)

se $g \circ f$ è iniettiva $\Rightarrow$ f iniettiva, MA NON necessariamente g

DIM app. per assurdo f non iniettiva, allora esistono
$a_1 \in A, a_2 \in A \mid a_1 \neq a_2$, ma $f(a_1) = f(a_2)$. Ma allora
$g(f(a_1)) = g(f(a_2))$ quindi $g \circ f$ non iniettiva, ciò è contraddittorio
l'ipotesi, quindi f deve essere iniettiva.

se $g \circ f$ è suriettiva $\Rightarrow$ g è suriettiva, ma non necessariamente f

DIM sia $c \in C$. Allora $\exists a \in A \mid g(f(a)) = c$ (abbiamo supposto che la composizione sia suriettiva)
posto $b = f(a)$ ho $b \in B$ e $g(b) = c$
ho così trovato $b \in B \mid g(b) = c \quad \forall c \in C$.

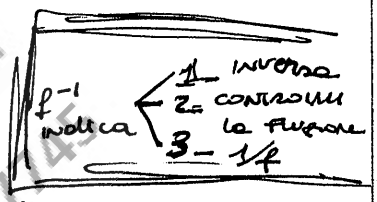


IMMAGINE E CONTROIMMAGINE

Data $f: A \to B$:

- $\forall D \subseteq A$ si definisce L'IMMAGINE di D $\quad f(D) = \{f(a) : a \in D\} \subseteq B$
  IMMAGINE DI UNA FUNZIONE È L'INSIEME $f(A)$
  $\stackrel{!}{=} \{b \in B \mid \exists a \in A : b = f(a)\}$
- $\forall E \subseteq B$ si definisce CONTROIMMAGINE di E $\quad f^{-1}(E) = \{a \in A : f(a) \in E\}$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

ESERCIZIO

f STRETT. DECRES
g STRETT. DECRES $\Rightarrow$ $f \circ g$ STRETT. CRESCENTE

INSIEMI NUMERI $\quad \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2 \dots\}$ naturali
$\mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$ interi
$\mathbb{Q} = \{m/n : m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$ razionali
$\mathbb{R} =$ reali
$\mathbb{C} = \{a + ib : a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$ complessi

NUMERI REALI $\mathbb{R}$

Sono una quaterna $(\mathbb{R}, +, \cdot, \geq)$ che soddisfa tre tipi di assiomi: algebrici, ordinamento, continuità

Assiomi algebrici $\rightarrow$ $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ È UN CAMPO

Assiomi di ordinamento $\rightarrow$ $\geq$ è una relazione d'ordine totale su $\mathbb{R}$, cioè

(ord 1) $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x \geq y \ \veebar \ x \leq y$ (totale)
(ord 2) $x \leq x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (riflessiva)
(ord 3) se $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (transitiva)
(ord 4) se $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$ (antisimmetrica)

$\mathbb{R}, +, \cdot, \geq$ È UN CAMPO ORDINATO cioè l'ordine e le proprietà algebriche verificano due assiomi:

1. se $x \geq y \Rightarrow x + z \geq y + z \quad \forall z \in \mathbb{R}$
2. se $x \geq y$ e $z \geq 0 \Rightarrow x \cdot z \geq y \cdot z \quad \forall z \in \mathbb{R}$

così che ci interessa $\mathbb{R}$ da $\mathbb{Q}$?

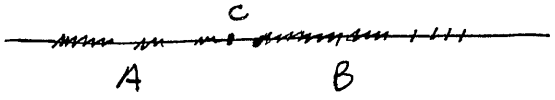
ASSIOMA DI CONTINUITÀ siano $A \subseteq \mathbb{R}, B \subseteq \mathbb{R}$ due sottoinsiemi non vuoti. Si dice che A sta a sx di B se:

$$\forall a \in A, \forall b \in B \quad a \leq b$$

L'assioma dice: Per ogni coppia di sottoinsiemi A e B, con A a sx di B, esiste un $c \in \mathbb{R}$ t.c

$$\forall a \in A, \forall b \in B \quad a \leq c \leq b$$

Il separatore c può essere unico o no a seconda dei casi.



$$\forall A \subseteq \mathbb{R}, \forall B \subseteq \mathbb{R} \ [\forall a \in A \ \forall b \in B, a \leq b] \wedge A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset$$
$$\Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} \ (\forall a \in A, \forall b \in B \quad a \leq c \leq b)$$

master copy COPISTERIA 081/831126 388/1083745