FUNZIONI IN 2 VARIABILI

$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad \mathcal{B}$ = BOREL, "Palla" (= palla del matematico)

$$\mathcal{B}((x_0,y_0),\delta) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \|(x,y)-(x_0,y_0)\| < \delta\}$$

senza bordo, senza raggio (ce parte dentro)

DEFINIZIONI ↳ "palla di centro (x_0,y_0) e raggio δ"

1) A si DICE APERTO SE $\forall x\in A \ \exists \delta>0$ tc $\mathcal{B}(x,\delta)\subseteq A$



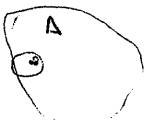
(se fisso disegnare un cerchio intorno ad un punto e il cerchio sta ancora dentro allinsieme)

2) C SI DICE CHIUSO se C^c è APERTO

$C^c = \mathbb{R}^n - C$ (complementare di C)

3) $\bar{x}$ (punto di $\mathbb{R}^n$) è DI ACCUMULAZIONE (PUNTO) PER A se

$\forall \mathcal{B}(\bar{x},\delta) \quad \exists x\neq\bar{x} \quad x\in\mathcal{B}(\bar{x},\delta)\cap A$



(se non riesco a staccare $\bar{x}$ da A)

4) $\bar{x}$ è (PUNTO) ISOLATO se 1) $\bar{x}\in A$

2) $\exists\delta>0$ tc $\mathcal{B}(\bar{x},\delta)\cap A=\emptyset$

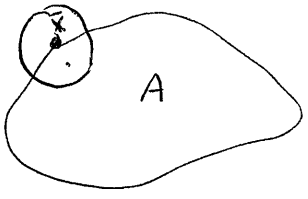


(È un punto che riesco a chiudere dentro un cerchio, ma che non tocca il mio insieme)

5) $\bar{x}\in \partial A$ = FRONTIERA DI A (PUNTO) SE $\forall\delta>0$

1) $\mathcal{B}(\bar{x},\delta)\cap A\neq\emptyset$

2) $\mathcal{B}(\bar{x},\delta)\cap A^c\neq\emptyset$



"Riesco a disegnare un cerchio intorno al punto e questo sta sia dentro che fuori A".

MASTER COPY COPISTERIA Tel. 050 8312126 Cell. 328 9837745

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

- **DEF** CONTINUA in $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \text{Dom } f$. funzione nel punto.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ tc } \forall (x,y) \in \mathcal{B}((x_0,y_0),\delta) \Rightarrow \boxed{|f(x,y) - f(x_0,y_0)| < \varepsilon}$$

(numero)

- **DEF** (IN 2 VARIABILI) $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \ell$ → il valore del limite

→ Punto dove voglio controllare le cose

se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tc $\forall (x,y) \neq (x_0,y_0) \ (x,y) \in \mathcal{B}((x_0,y_0),\delta)$

$$\Rightarrow \boxed{|f(x,y) - \ell| < \varepsilon}$$

DIFF. TRA LIMITE E CONTINUA:

$f(x,y)$ può tendere ad un limite $\ell \neq f(x_0,y_0)$

↳ Il limite se ne frega di cosa fa la funz. nel punto

TEOREMA f è continua in $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \iff \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$

DERIVABILITÀ

DEF V si dice direzione se $\|V\| = 1$

$$V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

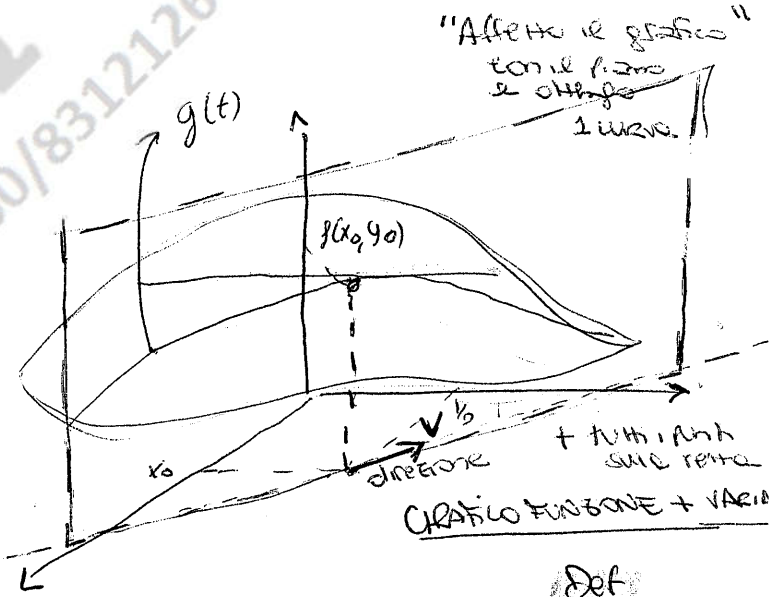
$$g(t) = f(x_0 + tv_1, y_0 + tv_2)$$

$$g(0) = f(x_0,y_0)$$

$t=0$

SIGN. GEOM. DERIV.

Coeff. angolare della retta tg al grafico nel punto (x_0,y_0)



$$g'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = \text{Def limite del rapporto incrementale}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + tv_1, y_0 + tv_2) - f(x_0,y_0)}{t}$$

MASTER COPY Tel. 050 8312126 Cell. 333 3337745

DERIVATA DIREZIONALE

DEF Sia $\|V\| = 1$

$$\frac{\partial f}{\partial V}(x_0, y_0) := \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tv_1,\ y_0 + tv_2) - f(x_0, y_0)}{t} = \frac{\text{ESISTE}}{\text{FINITO}}$$

$\|V\|$

DERIVATA DI f in (x_0, y_0) RISPETTO ALLA DIREZIONE V

DEF f SI DICE DERIVABILE in (x_0, y_0) se

$\forall$ V DIREZIONE $\exists \frac{\partial f}{\partial V}(x_0, y_0)$

DERIVATA PARZIALE

DEF Sia $V = e_i$ = i esimo vettore della base canonica

$$\frac{\partial f}{\partial V}(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial x_i} f(x_0, y_0)$$

x_i sta per x o y

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

TEOREMA SE ESISTONO TUTTE LE DERIVATE PARZIALI V in (x_0, y_0) $\Rightarrow$ ESISTONO TUTTE LE DERIVATE DIREZIONALI in (x_0, y_0)

$\rightarrow$ (Se esistono tutte le derivate parziali $\Rightarrow$ la f è derivabile)

INOLTRE Se $\underline{V} = V_1 \underline{e_1} + V_2 \underline{e_2}$

$$\frac{\partial f}{\partial V}(x_0, y_0) = V_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + V_2 \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

In forma contratta $\frac{\partial f}{\partial V}(x_0, y_0) = \langle \nabla f(x_0, y_0), V \rangle$

In + variabili, In analisi II

PROBLEMA !! **NON È' PIÙ VERO CHE DERIVABILE ⇒ CONTINUA**

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

↳ è DERIVABILE in $(0,0)$ MA NON CONTINUA. Perché il limite in $(0,0)$ non fa zero

DIFFERENZIABILITÀ

Sia f DERIVABILE in (x_0, y_0) $\quad f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to z = f(x,y)$

si DICE DIFFERENZIABILE in $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ se

$\exists\, \mathcal{L}$ (↑ applicazione lineare): $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ LINEARE (MATRICE 1×2 ↓ vettore riga)

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to ax+by$

Tc $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - \mathcal{L}(x_0,y_0)\cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$

SE IL LIMITE FA 0 ↓ È DIFFERENZIALE.

TEOREMA Se $\mathcal{L}(x_0,y_0)$ esiste $\Rightarrow \mathcal{L}(x_0,y_0) = \nabla f(x_0,y_0)$ (↓ vettore riga)

Def: GRADIENTE: È un vettore riga delle derivate prime

master COPY COPISTERIA 050 3312126 388 1933745

f è DIFF in (x_0, y_0)

$\Rightarrow$

1) ESISTE IL PIANO TANGENTE AD f in (x_0, y_0) DI EQUAZIONE

$$z = \underbrace{f(x_0, y_0)}_{\in \mathbb{R}} + \langle \nabla f(x_0, y_0) \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \rangle$$

2) f è DERIVABILE e CONTINUA in (x_0, y_0)

SVILUPPO TAYLOR I ORDINE

3) $$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) + o\left(\|(x-x_0, y-y_0)\|\right)$$

$\downarrow$ "o piccolo" è qualcosa che va a zero molto + velocemente di quella cosa che ci sta dentro. Modo di approssimare un errore.

DEF: $f(x) = o(g(x))$ con $x \to x_0$ se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

o - PICCOLA

TEOREMA DIFFERENZIALE TOTALE

Ip

1) f è DERIVABILE in (x_0, y_0)

2) LE DERIVATE PARZIALI SONO CONTINUE IN (x_0, y_0)

$\Rightarrow$ f è DIFF in (x_0, y_0)

La Escamotage x dimostrare quando ea funzione è differenziabile

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745