- stazionarietà → no variazioni nel tempo, sì nello spazio → no accelerazione; se ha $\vec{v}$ allora $\vec{v}$ = cost.

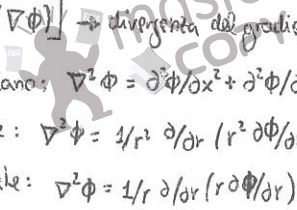
- FLUSSO → - **FLUX**: $\phi/m^2 s$ $\propto$ - gradiente ⇝ es.: **FLUSSO di MASSA** (medio): $[J = v_{media}\, \rho]$ (in generale $J = \vec{v}\rho$)

  - **FLOW** (flusso volumetrico): m^3/s $\Rightarrow \left[Q_{vol} = \int_A \vec{v}\cdot\hat{n}\, dA = v_{media}\cdot A\right]$

- sistemi di riferimento: - **EULERIANO**: sistema osservato da fermi mentre passa sopra
  - **LAGRANGIANO**: sistema seguito nel tempo e nello spazio



- NOZIONI:
  - **gradiente**: $\left[\nabla f = \left[i\, \partial f/\partial x + j\, \partial f/\partial y + k\, \partial f/\partial z\right]\right]$ → aumenta grado del tensore
  - **divergenza**: $\left[\nabla\cdot\vec{v} = \partial v_x/\partial x + \partial v_y/\partial y + \partial v_z/\partial z\right]$ → diminuisce il grado del tensore
  - **laplaciano**: $\left[\nabla^2\phi = \nabla\cdot(\nabla\phi)\right]$ → divergenza del gradiente
    - ↳ cartesiano: $\nabla^2\phi = \partial^2\phi/\partial x^2 + \partial^2\phi/\partial y^2 + \partial^2\phi/\partial z^2$
    - ↳ sferiche: $\nabla^2\phi = 1/r^2\, \partial/\partial r\,(r^2\, \partial\phi/\partial r)$
    - ↳ cilindriche: $\nabla^2\phi = 1/r\, \partial/\partial r\,(r\, \partial\phi/\partial r) + \partial^2\phi/\partial z^2$



  - **derivata materiale**: $\left[\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \vec{v}\nabla\phi\right]$ → derivata nel tempo di una funzione caratteristica di una particella di fluido sottoposta ad una velocità; rappresenta la variazione nel tempo di una certa proprietà ϕ di una particella fluida che si muove con velocità $\vec{v}$ (cambia in tempo e spazio)

- velocità: $\vec{v} = f(x,y,z,t)$ ⇝ **velocità media**: $\left[v_{media} = 1/A \int_A \vec{v}\cdot\hat{n}\, dA\right]$
  accelerazione: $\vec{a} = d\vec{v}/dt = \vec{v}\cdot\nabla\vec{v} + \partial\vec{v}/dt = D\vec{v}/Dt$ (solo per fluidi)

- **EQUAZIONE di CONTINUITÀ**: $\left[\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\nabla\cdot(\rho\vec{v}) = -(\vec{v}\cdot\nabla\rho + \rho\nabla\cdot\vec{v})\right]$ (come varia la massa in volume fisso nel tempo) N.B.: $\rho_{sangue} = \rho_{H_2O} = 1000\ kg/m^3$

  ↳ per fluidi incomprimibili: $[\nabla\cdot\vec{v} = 0]$ (conservazione massa)

  ↳ in un sistema chiuso (es. vascolare) si ha un flusso a volume costante, la massa non cambia nel tempo →
  → $Q_{in} = Q_{out} \Rightarrow [v_{in} A_{in} = v_{out} A_{out}]$

- Linee di flusso: linee tangenti al vettore velocità in ogni punto; non si intersecano e non possono essere attraversate da particelle; nei tratti con linee più dense la velocità aumenta

---

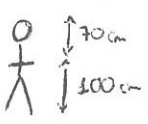
IDROSTATICA ($\vec{v}=0$)

- **EQUAZIONE di IDROSTATICA**: $\left[P_2 - P_0 = -\rho g z\right]$ $[Pa = N/m^2]$ → la pressione diminuisce all'aumentare dell'altezza ($P_0 > P_2$)



  ↳ u.d.m. = mmHg ⇝ 1 mmHg = 133 Pa ⇝ $P_{atm} = 760\ mmHg \cong 10^5\ Pa$ $P_{sistolica} = 120\ mmHg$ $P_{diastolica} = 80\ mmHg$
  $P_{aorta} = 100\ mmHg$ $P_{vena\ cava} = 0\ mmHg$
  P_c

  ↳ esercizio: calcolo pressione testa e piedi



TESTA: $P_T - P_c = -\rho g z = -\rho g(0.70m) \Rightarrow P_T = P_c - 6860\ Pa = 6440\ Pa \cong 48\ mmHg$

PIEDI: $P_c - P_p = -\rho g z = -\rho g(1m) \Rightarrow P_p = P_c + \rho g = 23100\ Pa \cong 173\ mmHg$

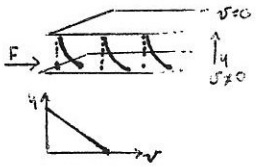
Viscosità : resistenza di un fluido a muoversi/scorrere ($\mu = [Pa \cdot s]$)

- particelle fluide appiccicose e aderiscono alle superfici → i fluidi resistono alla velocità di deformazione (a scorrimento) perché le molecole si attaccano alle superfici e non scivolano : **NO-SLIP** ($v_{liquido\ vicino\ parete} = v_{parete}$) → $F \propto \partial v/\partial t$ (da viscosimetro di Couette)

  ↳ fenomeno spiegato da esperimento **PIATTI PARALLELI** separati da un liquido :

  - piatto superiore fermo, piatto inferiore in movimento → molecole attaccate sopra sono ferme, quelle sotto si muovono (per NO-SLIP) → trasmissione moto a molecole adiacenti
  - andamento lineare velocità all'equilibrio
  - poiché fluidi appiccicosi occorre applicare una forza per muovere il piatto →

    → $F \propto A\,v/y$ (dice quanto scorre il fluido) → – area maggiore di contatto ⇒ maggiore forza necessaria
    – più lontano è piatto fermo, meno sento il rallentamento



- costante di proporzionalità = viscosità (per ogni)
- velocità si sviluppa lungo x

⇒ **EQUAZIONE COSTITUTIVA TRASPORTO di MOTO = = LEGGE di NEWTON** : $\boxed{\tau = \sigma_{yx} = -\mu\, dv_x/dy}$ ⇝

flusso : $\frac{massa \cdot velocità}{m^2 s} = Pa$

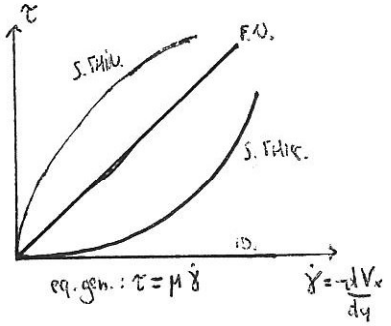
⇝ • trasporto opposto a gradiente di velocità

• sforzo = trasp. di moto : $\overbrace{Kg\,(m/s^2)\,(1/m^2)}^{sforzo} = \overbrace{Kg \cdot m/s \cdot 1/m^2 s}^{trasp.} = Kg/ms^2$ ok

• U.d.m. viscosità = **POISE** (P) • **CENTIPOISE** (cP) ⇝ $1\,cp = 10^{-3}\,Pa \cdot s$ e $1\,p = 10^{-2}\,Pa \cdot s$

REOLOGIA : studio dei fluidi non ideali

• CLASSIFICAZIONE FLUIDI : (grafico sforzo di taglio – gradiente di velocità)



- **FLUIDI NEWTONIANI** : • seguono la legge di Newton;
  • viscosità costante, indipendente da sforzo applicato o dal gradiente di velocità ($\sigma_{yx} = \mu\dot{\gamma}$, $n=1$);
  • grafico = retta con pendenza = μ;
  • a parità di sforzo il liquido meno viscoso ha gradiente maggiore (è più facile da spingere);

- **FLUIDI SHEAR-THINNING** : • pseudo plastici;
  • aumentando lo sforzo il fluido scorre meglio, cioè al diminuire dello sforzo aumenta la resistenza allo scorrimento ($\sigma_{yx} = \mu\dot{\gamma}^n$, $n<1$); diminuisce la resistenza a scorrere all'aumentare della velocità
  • esempi : sangue, pittura.

- **FLUIDI SHEAR-THICKENING** : • dilatanti;
  • aumentando lo sforzo di taglio aumenta la viscosità ed è più difficile muoverlo ($\sigma_{yx} = \mu\dot{\gamma}^n$, $n>1$);
  • esempi : sabbia, argilla.

- **FLUIDI IDEALI** : • $\nexists$, ma possono essere considerati tali quelli che non sentono attriti, lontani dalle pareti e che si muovono alla stessa velocità;
  • sono incomprimibili, irrotazionali, inviscidi.

• DATI UTILI : $\mu_{H_2O} = 1\,cP = 10^{-3}\,Pa \cdot s$; $\mu_{aria} = 10^{-6}\,Pa \cdot s$; $\mu_{sangue} = 4\,cP = 4 \cdot 10^{-3}\,Pa \cdot s$; $\mu_{glicerolo} = 1\,Pa \cdot s$

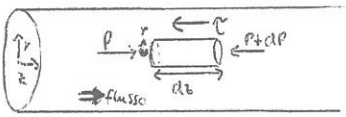
• al variare della temperatura varia la viscosità : nei liquidi, a T elevata, la viscosità diminuisce (si facilita lo scorrimento delle molecole perché rotano più mobili); nei gas la viscosità aumenta all'aumentare di T (più probabilità di interazione tra le molecole)

• mobilità = scorrevolezza fluido = 1/viscosità $[Pa^{-1} s^{-1}]$

LEGGE di POISEUILLE

- ipotesi:
  1) condotto cilindrico 2) fluido newtoniano 3) condizioni stazionarie 4) tubo infinitamente lungo e orizzontale (F_z)
  5) no-slip ($\vec{v}_{parete} = 0$) 6) simmetria cilindrica ($\theta = 0$) 7) flusso LAMINARE (no turbolenti): ogni strato muove alla propria velocità e si muove assieme agli strati adiacenti

↳ EQUAZIONE di STOKES: $\left[\tau = -\frac{dP}{dz} \cdot \frac{r}{2}\right]$

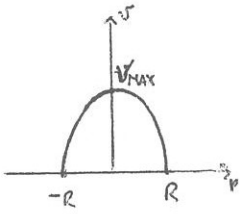


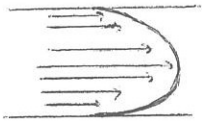
↳ bilancio di forze di un fluido (anche non newtoniano) che si muove in condizioni stazionarie

↳ se fluido newtoniano ($\tau_{rz} = -\mu \, dv_z/dr$) ⇒ $dv_z/dr = dP/dz \; r/2\mu$ ⇒ · $dP/dz = cost$ (stazionarietà) · in $r = R \Rightarrow v = 0$ (no-slip) ⇒

⇒ $\left[v_z(r) = \frac{dP}{dz}\frac{1}{4\mu}(r^2 - R^2)\right]$ EQUAZIONE VARIAZIONE VELOCITA' lungo r (N.B.: $dP/dz < 0$ | v varia nello spazio perché stazionarietà)

↳ andamento parabolico e profilo parabolico poiseuilliano: alle pareti la velocità è 0 e al centro è massima, perché alle pareti le particelle sono costrette a non muoversi per il no-slip e ciò influenza anche le altre, fino a quelle centrali che ne risentono meno e sono più veloci





↳ $\left[v_{max} = -dP/dz \; 1/4\mu \, R^2\right]$

↳ equazione adimensionale: $v_z(r)/v_{max} = 1 - r^2/R^2$ → parametro che caratterizza in maniera generale sistemi di questo tipo: tutti i tubi hanno lo stesso profilo, cioè lo stesso comportamento in funzione del raggio

↳ analizzando il flusso volumetrico si ricava: N.B.: $Q_{vol} = A \cdot v_{media}$

$$\left[Q_{vol} = \int_A \vec{v}\cdot\vec{n}\,dA = \int_A v\,dA = \int_0^R v(r)\,2\pi r\,dr = -\frac{dP}{dz}\frac{\pi}{8\mu}R^4\right] \; [m^3/s]$$ EQUAZIONE di POISEUILLE

- combinando Stokes e Poiseuille è possibile ricavare lo SFORZO di TAGLIO alla PARETE dei VASI: $\left[\tau_{WALL} = 4\,Q_{vol}\mu/\pi R^3\right]$

↳ analisi volta a stimare il comportamento del sangue nei vasi ma non precisa perché ipotesi su fluido e vaso non rispettate in quanto il sangue non è newtoniano, il flusso è non stazionario e non laminare e i vasi non rigidi, non infinitesimi e non infinitamente lunghi

↳ è possibile scrivere τ_{WALL} in funzione di V_{MEDIA} → $\tau_{WALL} = 4\,V_{MEDIA}\,\mu/R$ (perché $V_{MEDIA} = -dP/dz \; R^2/8\mu$)

- STIMA SFORZO di TAGLIO AORTA e CAPILLARE:
  - AORTA: $Q_{vol} = 5\,L/min = 5\cdot10^{-3}\,m^3/60s$; $d = 2/3\,cm$; $\mu_{sangue} = 4\,cP = 4\cdot10^{-3}\,Pa\cdot s$ →
    → $\tau_{WALL} \cong 0.13\,Pa$
  - CAPILLARE: $Q_{vol} = 5.024\cdot10^{-14}\,m^3/s$; $d = 8\,\mu m$; $v = 1\,mm/s$ →
    → $\tau_{WALL} = 4\,Pa$

N.B.: τ ha andamento lineare → è max alle pareti (maggior rallentamento) e minimo al centro

NUMERO di REYNOLDS

- numero adimensionale che permette di analizzare sistemi con grandezze diverse ma usando la stessa fisica e le stesse considerazioni;
- esprime il rapporto tra le diverse forze in gioco in un sistema, in particolare tra FORZE INERZIALI su unità di volume e FORZE viscose su unità di volume, rappresentando la difficoltà di fermare l'oggetto rispetto a farlo scorrere (quanto prevale l'inerzia sull'attrito)

↳ f. inerziali/vol = $\rho v^2/L$; f. viscose/vol = $\mu v/L^2$ ⇒ $\boxed{Re = \rho vL/\mu}$

Re grande: predomina inerzia
Re piccolo: predomina viscosa

- CASI:
  - Re < 2000 : flusso laminare
  - Re > 5000 : flusso turbolento (attrito trascurabile e difficile previsione del comportamento)
  - 2000 < Re < 5000 : zona di transizione con compresenza degli effetti
- permette di capire in che modo si muove il sistema conoscendone densità, viscosità, lunghezza e velocità
- se due sistemi hanno stesso Re il carattere del flusso dei due sistemi è uguale, cioè hanno stessa fluidodinamica, e viceversa →
  → "DYNAMIC SIMILARITY": linee di flusso simili, i sistemi percepiscono lo stesso rapporto di forze
- il Re si utilizza per confrontare sistemi con "numeri" simili: graficando Re si osserva che sistemi piccoli hanno Re piccolo, mentre sistemi grandi hanno un Re maggiore (poiché L = grandezza caratteristica) → maggiore è L maggiore saranno Re e v
  ↳ il Re di un oggetto che si muove in fluido è: $\boxed{Re = \rho_{fluido} v_{oggetto} L_{oggetto}/\mu_{fluido}}$
  N.B.: un sistema con oggetto in moto e fluido fermo ha lo stesso Re di un sistema con oggetto fermo e fluido in moto (stessa dinamica)
- è possibile esprimere Re anche come $\boxed{Re = VL/\nu}$, dove $\boxed{\nu = \mu/\rho}$: VISCOSITÀ CINEMATICA (misurata in Stokes, rappresenta la resistenza al moto del fluido, "l'appiccicosità")
  ↳ viscosità DINAMICA (attrito interno del fluido)
- Re APERTA = 300/1225 : valore che indurrebbe a pensare che non si tratta di un flusso turbolento ma in realtà lo è, perché in questo valore non si considera la curvatura che subisce l'acqua che restringe il fluido ad avere un'accelerazione importante

Re CAPILLARE = $10^{-4}/10^{-3}$

STRATO LIMITE (quando sono molto lontano, in un sistema con l'oggetto in moto, non si sente più l'attrito)

- strato adiacente ad un oggetto in un fluido in cui sono rilevanti le forze di attrito (strato vicino all'oggetto che si muove grazie al NO-SLIP) → = le forze viscose!
- il moto viene trasferito in maniera laminare e diminuisce progressivamente finché si arriva in una zona in cui non è più percepibile
- lo strato limite si ha intorno all'oggetto che si muove oppure è lo strato adiacente ad una parete in cui si muove il fluido, dove l'attrito è importante → condotto stretto: attrito si sente ovunque; condotto largo: attrito ai bordi e non al centro
- quanto è grande lo strato limite? È quella zona in cui la velocità è minore di una certa frazione di quella del centro, quindi si considera che le forze inerziali sono k volte le forze d'attrito, con una proporzionalità stabilita in base ad una tolleranza arbitraria:

$\rho v^2/L = k\mu v/\delta^2 \rightarrow \boxed{\delta \propto L/\sqrt{Re}}$

www.master COPY

EQUAZIONE di BERNOULLI

- analisi di fluidi inviscidi → no effetti viscosi ($\mu \to 0$), quindi ogni particella non influisce sulle altre
  → analisi in zone dove attrito non è importante (grandi masse di fluido o lontano dalle pareti)

- considerando un fluido stazionario e laminare e tracciando le linee di flusso → bilancio di forze lungo s (direzione flusso) →

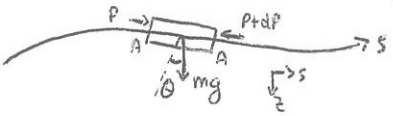
→ $m v \frac{dv}{ds} = -dPA - mg\sin\theta$ →

→ $\rho v dv + dP + \rho g dz = 0$

EQUAZIONE DIFFERENZIALE di BERNOULLI

integro → $\frac{\rho v^2}{2} + P + \rho g z = cost.$

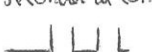
EQUAZIONE di BERNOULLI



~ equazione di bilancio di forze per un fluido che si muove nello spazio in assenza di viscosità

~ è possibile esprimerla in termini di:
- conservazione di energia per unità di volume:
  E. CINETICA / VOL. + E. PRESSIONE / VOL. + E. POTENZIALE / VOL. = cost.
- pressione: P. CINETICA + P. STATICA + P. IDROSTATICA = cost.

- manometro: sensore di pressione rappresentato da un tubo con membrana flessibile (maggiore pressione implica maggiore flessione) →
  → a seconda di come è posizionato si ottengono risultati diversi →

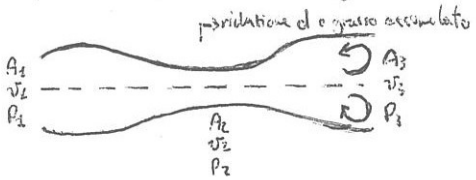
→ 

caso 1: misura sia pressione statica P che cinematica $1/2 \rho v^2$

caso 2: misura solo pressione statica

→ principio sfruttato nel TUBO di PITOT che permette di conoscere la velocità del fluido conoscendo la differenza di pressione

- applicazione Bernoulli: STUDIO dei CAMBIAMENTI FLUIDODINAMICI all'interno dei VASI, con problemi di ispessimento o restringimento (variazioni di sezione)



↳ ipotesi: - perdite viscose trascurabili nel sistema circolatorio (piccoli tratti)
- analisi lungo percorso centrale (si trascura $\rho g h$) →

→ è applicabile Bernoulli: $P_1 + \rho v_1^2/2 = P_2 + \rho v_2^2/2 = P_3 + \rho v_3^2/2$

→ da eq. di continuità: $A_1 v_1 = A_2 v_2$ → poiché $A_1 > A_2$ allora $v_2 > v_1$ → $P_1 > P_2$

$A_2 v_2 = A_3 v_3$ → poiché $A_3 > A_2$ allora $v_2 > v_3$ → $P_3 > P_2$

↳ la parte centrale non subisce particolari fenomeni (fluidi inviscidi considerati ideali al centro perché no disturbi da attrito);

↳ problemi alle pareti: tra 2 e 3 avviene un'inversione di flusso dovuta all'inversione del gradiente di pressione rispetto alla direzione di moto. Questo fenomeno è denominato SEPARAZIONE del FLUSSO e porta alla creazione di vortici in uscita dalla sezione 2.
A livello fisiologico questa situazione peggiora gradualmente la formazione di coaguli nei vasi, in quanto non viene lavato via ciò che si forma e ostruisce il vaso, ma anzi viene ingigantito a causa del deposito di altre sostanze → porta alla formazione di trombi e all'occlusione dei vasi a causa dell'eccessivo ispessimento e chiusura del diametro (STENOSI).
Nel caso di un ANEURISMA (allargamento del vaso quando le pareti sono deboli e tendono a cedere) la velocità si riduce e la pressione aumenta: ciò può portare al vaso a scoppiare perché si raggiunge un valore limite oltre il quale si ha rottura (tutta l'energia cinetica è convertita in pressione e il fluido non può andare avanti).

↳ questo principio viene sfruttato nel TUBO di VENTURI per creare il vuoto (pressione negativa) nei condotti

master COPY