Analisi

- 1) I Limiti

• Teoremi: (↓ limiti che esistono e sono finiti)

ⓐ $\lim_{x\to x_0}(f\pm g)=\lim_{x\to x_0} f \pm \lim_{x\to x_0} g$

ⓑ $\lim_{x\to x_0}(f\cdot g)=\lim_{x\to x_0} f\cdot \lim_{x\to x_0} g$ ⓒ $\lim_{x\to x_0}\frac{f}{g}=\frac{\lim_{x\to x_0} f}{\lim_{x\to x_0} g}$

ⓓ $\lim_{x\to x_0} f^g=\left[\lim_{x\to x_0} f\right]^{\lim_{x\to x_0} g}$ ⓔ $\lim_{x\to x_0}\sqrt[n]{f}=\sqrt[n]{\lim_{x\to x_0} f}$

ⓕ $\lim_{x\to x_0}(f)^n=\left(\lim_{x\to x_0} f\right)^n$ ⓖ $\lim_{x\to x_0}\log_a f=\log_a\left(\lim_{x\to x_0} f\right)$

ⓗ $\lim_{x\to x_0} a^f=a^{\lim_{x\to x_0} f}$ ⓘ $\lim_{x\to x_0} f(g(x))=f\left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right)$

• Teorema del confronto

Date tre funzioni: $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ tale che: $g(x)\le f(x)\le h(x)$ e $\lim_{x\to x_0} g(x)=\lim_{x\to x_0} h(x)=\ell$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell}$$

• Definizione di continuità: $\boxed{\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)}$

↓ quando limite destro e sinistro di $f(x)$ sono uguali.

• Forme indeterminate: ① $\frac{0}{0}$ ② $\frac{\infty}{\infty}$ ③ $(0\cdot\infty)$ ④ $(\infty\cdot 0)$ ⑤ $+\infty-\infty$

⑥ ∞^0 ⑦ 0^0 ⑧ 1^∞

• LIMITI NOTEVOLI:

① $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ ② $\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\simeq 2{,}7$

③ $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0$ ④ $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$

⑤ $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x^2}=\frac{1}{2}$ ⑥ $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$

⑦ $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$ ⑧ $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$

• GERARCHIA degl'INFINITI:

Date le Tre famiglie di funzioni: $(\log_a x)^\alpha$, x^β, b^x con $\alpha,\beta>0$ e $a,b>1$

⇒ per $x\to+\infty$, ognuno è un infinito di ordine inferiore rispetto a quello che si trova a destra, cioè:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\log_a x)^\alpha}{x^\beta}=0 \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^\beta}{b^x}=0$$

$$\Rightarrow \boxed{(\log_a x)^\alpha < x^\beta < b^x}$$ (logaritmo < potenza < esponenziale)

Libro Matematica Lceo

Pag. 1501 n.3

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x^2}-x+\frac{1}{x}\right)=0-\infty+0=-\infty$$

n.4

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{5-2x+3x^2}{1+x^2-x^3-x^4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(3-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}{x^4\left(-1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)}=\frac{3}{+\infty}=0$$

n.5

$$\lim_{x\to-2^+}\frac{x^2-3x-10}{x^3+3x^2-4}=\lim_{x\to-2^+}\frac{(x-5)(x+2)}{(x+2)^2(x-1)}=\frac{(-7)}{(0)(-3)}=+\infty$$

n.6

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+2}}{2x+1-x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+2}}{x-1}=\frac{\infty}{\infty}\ \text{f.i.}$$

Applico il teorema di De l'Hospital, percui: $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2\sqrt{2x+1}}(2)+\frac{1}{2\sqrt{x+2}}=0+0=0$$

n.7

$$\lim_{x\to2}\frac{x^3-x^2-2x}{x^3-6x^2+12x-8}=\lim_{x\to2}\frac{x^3\left(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}{x^3\left(1-\frac{6}{x}+\frac{12}{x^2}-\frac{8}{x^3}\right)}=\frac{\left(1-\frac{1}{2}-1\right)}{(1-3+3-1)}=\frac{-\frac{1}{2}}{0}=+\infty$$

n.13

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\sqrt{x^2+x}}{\cos x}=\frac{0}{1}=0$$

n.19

$$\lim_{x\to0}\frac{1+\cos(x+\pi)}{\operatorname{sen}(3x)}=\frac{0}{0}\ \text{f.i. Applico De l'Hospital}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{-\operatorname{sen}(x+\pi)(1)}{\cos(3x)(3)}=\frac{0}{3}=0$$

n.22

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x+2x}{\sin x-x^2}=\frac{0}{0}\ \text{f.i. Applico De l'Hospital}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{\cos^2x}+2}{\cos x-2x}=\frac{3}{+1}=+3$$

n.24

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\log_2\left(\frac{\cos x+2\operatorname{sen}x}{\cot x+1}\right)=\log_2(2)=1$$

n.25

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)^2}{\sin x}=\frac{0}{0}\quad\text{Applico il teorema di De l'Hospital}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{(1+x)^2}\cdot2(1+x)}{\cos x}=2$$

Esercizi Limiti - Proff. Pratelli

10/11/18

- Prima parte

Es. 1

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)\cos(2x^2)}{\ln(1+3x)} = \frac{0}{0}$ f.i. Applico de l'Hospital

$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x^2)(2x)\cdot\cos(2x^2)+\sin(x^2)(-\sin(2x^2))(4x)}{\frac{1}{(1+3x^2)}\cdot 6x}$

Es. 4

$\lim_{x\to+\infty} \arctan(e^x) - \frac{\sin(x^4)+x^2}{\ln(1+x^4)} = +\infty - \infty$ sarebbe una f.i., ma per la regola della gerarchia degli infiniti, per cui: $\log < x^\beta < b^x$

$= \lim_{x\to+\infty} \arctan(e^x) - \frac{\sin(x^4)+x^2}{\ln(1+x^4)} = +\infty$

Es. 7

$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(3x)}{3\tan(x)} + \frac{\sin(4x)}{4\sin(x)} + \frac{\cos(5x)}{5\cos(x)}$ poiché, per $x\to 0$, $\tan(3x) = 0$ e $3\tan(x) = 0$

$\Rightarrow 3\tan(x) = \tan(3x) = 0$ e lo stesso per le funzioni del seno

$\lim_{x\to 0} \frac{3\sin x}{3\tan x} + \frac{4\sin(x)}{4\sin(x)} + \frac{\cos(5x)}{5\cos(x)} =$

$= 2 + \frac{1}{5} = \frac{11}{5}$

7/01/19

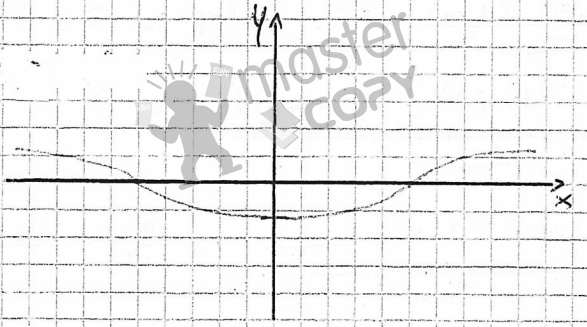
Prima parte Es 1

$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(x^2) - e^{\sin(x)}}{\sin(1+x+2x^2)} = \frac{0}{0}$ f.i. Applico de l'Hospital

$\lim_{x\to 0^+} \frac{(-\sin(x^2))(2x) - e^{\sin(x)}\cdot\cos(x)}{\cos(x^2+x+1)(2x+1)} = \frac{-1}{\cos(1)}$

Es. 4

$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(e+\frac{1}{x^2}\right)-1}{\arctan(x^2) - \frac{\pi}{2}} = \frac{-1}{0} = +\infty$



31/01/19

Prima parte

Es. 1

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - \cos x}{x^2 + x - \operatorname{sen} x} = \frac{0}{0} \quad \text{f.i.} \quad \text{Applico De l'Hospital}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x + \operatorname{sen} x}{2x + 1 - \cos x} = \frac{e^0 + \operatorname{sen}(0)}{2(0) + 1 - \cos(0)} = \frac{1}{0+1-1} = \frac{1}{0} = +\infty$$

Es. 3

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x \ln x + x^4 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^3}\right) - x^{3/2}}{e^{\pi/4 \ln x}} = +\infty \quad \text{per gerarchia degl'ordini di infinito}$$

03/06/19 Es. 1

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(x^2)\ln(1+x)}{\operatorname{sen}(x) - x} = \frac{0}{0} \quad \text{f.i.} \quad \text{Applico De l'Hospital}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(\cos(x^2))(2x)\ln(1+x) + \operatorname{sen}(x^2)\frac{1}{(1+x)}}{\cos x - 1} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(x^2)(2x)(2x)\ln(1+x) + \cos(x^2)(2)\ln(1+x) + \cos(x^2)(2x)\frac{1}{1+x} + \frac{\cos(x^2)(2x)(1+x) - \operatorname{sen}(x^2)}{(1+x)^2}}{-\operatorname{sen} x}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \cos(x^2)$$

Es. 3

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2 \ln(x)}{\sqrt{x^4 + x^3}} = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{Applico De l'Hospital}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2 \ln(x)}{\sqrt{x^4\left(1 + \frac{1}{x}\right)}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2 \ln(x)}{x^2\sqrt{\left(1 + \frac{1}{x}\right)}} = +\infty$$

15/07/19 Es. 3

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 \ln(2+x)}{\tan(x) - x} = \frac{0}{0} \quad \text{Applico De l'Hospital}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2x\ln(2+x) + x^2\frac{1}{(2+x)}\cdot(1)}{\frac{1}{\cos^2 x} - 1} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2x\ln(2+x) + \frac{x^2}{(2+x)}}{\tan^2 x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(2x\ln(2+x))(2+x) + x^2}{(2+x)\tan^2 x} =$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{4x + 2x^2 + 2\ln(2+x) + x\ln(2+x) + x^2}{(2+x)\tan^2 x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{3x^2 + 4x + 2\ln(2+x) + x\ln(2+x)}{(2+x)\tan^2 x} =$$

$$= \frac{2\ln(2)}{0} = +\infty$$

Esercizi sui Limiti - OneLine

(a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4-x^3+1}{\sqrt{x}+x^2-x^3} = \frac{\infty}{\infty}$ f.i.

$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^4}\right)}{x^3\left(\frac{1}{x^2\sqrt{x}}+\frac{1}{x}-1\right)} = \frac{+\infty(1)}{(-1)} = -\infty$

(b) $\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^3}{3x^2-4} - \frac{x^2}{3x+2}\right) = \frac{\infty}{\infty}$ f.i.

$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^3(3x+2)-x^2(3x^2-4)}{(3x^2-4)(3x+2)}\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x^4+2x^3-3x^4+4x^2}{9x^3+6x^2-6x-8} =$

$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3\left(2+\frac{4}{x}\right)}{x^3\left(9+\frac{6}{x}-\frac{6}{x^2}-\frac{8}{x^3}\right)} = \frac{2}{9}$

(c) $\lim_{x\to0} \frac{x^3-x^2+4x}{x^5-x} = \frac{0}{0}$ Applico De l'Hospital

$\Rightarrow \lim_{x\to0} \frac{3x^2-2x+4}{5x^4-1} = -4$

(d) $\lim_{x\to1^+} \frac{x^4-x^3+1}{1-x^3} = \frac{1-1+1}{1-1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

(f) $\lim_{x\to2} \frac{2x^3-5x^2-4x+12}{x^4-4x^3+5x^2-4x+4} = \frac{0}{0}$ f.i Applico De l'Hospital

$\lim_{x\to2} \frac{6x^2-10x-4}{4x^3-12x^2+10x-4} = \lim_{x\to2} \frac{3x^2-5x-2}{2x^3-6x^2+5x-2} = \frac{12-12}{16-24+10-2} = \frac{0}{0}$ f.i App. De l'Hospital

$\lim_{x\to2} \frac{6x-5}{6x^2-12x+5} = \frac{12-5}{5} = \frac{7}{5}$

(g) $\lim_{x\to0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = \frac{0}{0}$ f.i. Applico De l'Hospital

$\lim_{x\to0} \frac{1}{2\sqrt{1+x}} + \frac{1}{2\sqrt{1-x}} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$

(h) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}) = \infty-\infty$ Razionalizzo

$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}(x+1-x)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}\,1}{\sqrt{x}\left(\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}+1\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{x+1}{x}}+1\right)} = \frac{1}{2}$

(m) $\lim_{x\to0} \frac{\sin x^4}{\sin^2 x^2} = \lim_{x\to0} \frac{\cos(x^4)(4x^3)}{2\sin(x^2)\cos(x^2)(2x)} = 0$

$= \lim_{x\to0} \left(\frac{\sin x^4}{x^4}\right)\cdot\left(\frac{x^2}{\sin x^2}\right)^2 = \lim_{x\to0} 1\cdot1 = 1$

- $\frac{\sin x^4}{x^4}$: limite notevole $\frac{\sin t}{t} = 1$
- $\left(\frac{x^2}{\sin x^2}\right)^2$: teorema del cambiamento di variabili

$\frac{x^2}{\sin x^2} = \left(\frac{\sin x^2}{x^2}\right)^{-1} = (1)^{-1} = 1$