1) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ MAX/MIN in $[0;3]$

$$f'(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

// derivate di $x=1$

$$\frac{[1\cdot(1+x^2)] - x\cdot 2x}{[(1+x^2)]^2}$$

$$\frac{1+x^2-2x^2}{[(1+x^2)]^2} \geq 0$$

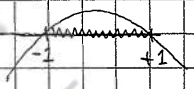
sempre >0

$N \geq 0$

$-x^2+1 \geq 0$

$(1+x)(1-x) \geq 0$

$-1 \leq x \leq 1$



PUNTI ↓ VALORI ↓

$f(0) = \frac{0}{1} = 0$ MIN

$f(3) = \frac{3}{10} = 0{,}3$ ← NO MIN perché interv. è $[0;3]$

$f(-1) = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$ $(-0{,}5)$

$f(1) = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ $(0{,}5)$ MAX

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

2) Calcola i seguenti limiti

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2-x^4)}{1-\cos(2x)} = \frac{x^2-x^4}{1-1+\frac{4x^2}{2}} = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$

$\sin x \sim x$

Taylor $= 1-\frac{x^2}{2}$

// ovviamente era un $\frac{0}{0}$

b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(1+e^x)}{\sqrt{x+2}} = \frac{e^x}{\sqrt{x}}$ $(x \to +\infty) \to e^x = e^{\infty} = +\infty$

$\sim \sqrt{x}$

Taylor: $\dots e^x \dots$

c) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(e^x)}{1+x}$ = Se sviluppo Taylor di $\sin x = x - \frac{x^3}{3!}$ → se $x = e^x$ → sopra ho un N° $\to 1+\infty = \infty$ $\to \frac{N}{\infty} = 0$

1) Insieme di definizione di:

$\arcsen(e^{2x}-2)$

Per definizione l'arcoseno è definito tra $[-1;1]$ ovvero:

$$-1 \leq (e^{2x}-2) \leq 1 \quad \rightarrow -1+2 \leq (e^{2x}-2+2) \leq 1+2$$

$$\rightarrow \quad 1 \leq e^{2x} \leq 3 \rightarrow \ln 1 \leq \ln e^{2x} \leq \ln 3$$

$$\ln e^{2x} \rightarrow 2x \ln e$$

$$0 \leq x \leq \frac{\log 3}{2}$$

$$\rightarrow 0 \leq 2x \leq \ln 3 \rightarrow \frac{0}{2} \leq x \leq \frac{\ln 3}{2}$$

2) Sviluppo ordine 4 Taylor

$$f(x) = (x-x^3)\,\text{sen}(6x)$$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

$$\text{sen}\,x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

$$\text{sen}(6x) = 6x + O(x^3)$$ Provo sviluppo ordine "1"

$$(6x + O(x^3))(x-x^5) =$$

$$= 6x^2 - 6x^4 + Ox^4 + Ox^6 \rightarrow 6x^2 + Ox^4 \quad \text{NO!}$$

$$\frac{216}{6}$$

$$\rightarrow 6x - \frac{216}{6}x^3 + Ox^5$$

Allungo sviluppo: $\left(6x - 36x^3 + Ox^5\right)(x-x^3) =$

$x - \frac{x^3}{3!}$

$$6x^2 - 36x^4 + Ox^6 - 6x^4 + 36x^6 + Ox^8$$

$$6x^2 - 42x^4 + Ox^6$$

Taylor: Ripeno

$e^x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$

$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$

$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 + \dots$

$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots$

$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$

PER $x \to +\infty$

$e^x \gg x^a \gg \log x$

EQ. ASINTOT. PR. $(x \to 0)$

- $\sin x \sim x$
- $\tan x \sim x$
- $e^x - 1 \sim x$
- $\ln(1+x) \sim x$
- $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$
- $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$

MAX/MIN → faccio $f'(x) \geq 0$ e poi sostituisco valori intervallo I e delle derivate per trovare PUNTI MAX/MIN.

FUNZ crescente SE $f'(x) > 0$

decrescente SE $f'(x) < 0$

- $\cos 0 = 1$
- $\log(1) = 0$
- $e^{-\infty} = 0$
- $e^{\infty} = \infty$

LIMITI

- $+\infty + L = +\infty$
- $+\infty - L = +\infty$
- $-\infty + L = -\infty$
- $-\infty - L = -\infty$
- $+\infty - \infty =$ F.I.
- $+\infty \cdot +\infty = +\infty$
- $+\infty \cdot -\infty = -\infty$
- $+\infty \cdot +L = +\infty$
- $+\infty \cdot -L = -\infty$
- $-\infty \cdot +L = -\infty$
- $-\infty \cdot -L = +\infty$
- $+\infty \cdot 0 =$ F.I.
- $-\infty \cdot 0 =$ F.I.
- $\frac{L}{+\infty} = 0$ $\quad \frac{L}{0^+} = +\infty$
- $\frac{L}{-\infty} = 0$ $\quad \frac{L}{0^-} = +\infty$
- $\frac{+\infty}{0} = +\infty$
- $\frac{L}{0} =$ NON ESISTE
- $\frac{+\infty}{\pm\infty} =$ F.I.
- $\frac{0}{0} =$ F.I.

le F.I. le risolviamo con Taylor o De l'Hôpital

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Per quali $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione risulta continua e derivabile

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - b & \text{per } x \geq 2 \\ be^{a(x-2)} & \text{per } x < 2 \end{cases} \quad \Big\} 2 \rightarrow \text{RACCORDO}$$

CONTINUITÀ = sostituisco il RACCORDO alle due funzioni ed eguaglio

$$4 - b = b$$
$$-2b = -4$$
$$2b = 4$$
$$b = 2$$

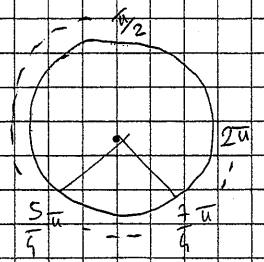
DERIVABILITÀ = faccio la derivata delle due funzioni ed eguaglio

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \\ b\,(e^{a(x-2)}) \cdot (a) \end{cases} \Rightarrow 2x = b \cdot a \Rightarrow a = 2$$

($e^{a(x-2)}$: 1; (a): DERIVATA; $2x$: 2; $b \cdot a$: 2)

- $\sin(\pi x) \leq -\frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad [\frac{1}{2}, 2[$ $\quad \frac{\pi}{2}, 2\pi$

Vedo valori dove il sen è $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ cioè $\frac{5}{4}\pi$ / $\frac{7}{4}\pi$



$$\frac{5}{4}\pi < \pi x < \frac{7}{4}\pi$$
$$\frac{5}{4} < x < \frac{7}{4}$$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) := \underbrace{(3x+a)}_{f(x)} \underbrace{e^{x^2}}_{g(x)}$$

è crescente su tutto $\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow f'(x) > 0$

$$f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) > 0$$

$$(3x+a) \cdot (e^{x^2} \cdot 2x) + 3 \cdot e^{x^2} > 0$$

$$(3x+a) \cdot (2e^{x^2}x) + 3 \cdot e^{x^2} > 0$$

$$(6e^{x^2}x^2) + (2e^{x^2}ax) + 3 \cdot e^{x^2} > 0$$

// raccolgo e^{x^2}

$$\underbrace{e^{x^2}}_{\text{SEMPRE} > 0} (6x^2 + 2ax + 3) > 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$4a^2 - 4(18) = 4a^2 - 72$$

Pongo $\Delta < 0$

$$4a^2 - 72 < 0$$

$$\frac{4a^2}{4} = \frac{72}{4}\ 18$$

$$a^2 = 18$$

$$a = \pm\sqrt{18}$$

$$-\sqrt{18} < a < \sqrt{18}$$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745