Insiemi di Numeri

$\mathbb{N} = \{\text{Numeri naturali}\} = \{0, 1, 2 \dots\}$

$\mathbb{Z} = \{\text{Numeri interi}\} = \{0, \pm 1, \pm 2 \dots\}$

$\mathbb{Q} = \{\text{numeri razionali}\} = \left\{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\right\}$

$\mathbb{R} = \{\text{Numeri reali}\}$

I numeri reali sono quelli con un segno, un numero finito di cifre avanti la virgola, un numero finito o infinito di cifre dopo la virgola

$\pi = 3,14159 \dots$ $\quad -\frac{4}{3} = -1,33$

Osservazioni

- $\mathbb{N}$ introdotto per contare (tranne lo zero)
- I numeri reali e razionali positivi sono stati introdotti per misurare (per esempio una lunghezza rispetto a una data unità di misura data)
- I numeri razionali non bastano per le misure: la diagonale del quadrato di lato 1 è $\sqrt{2}$ che non è razionale; lo scrivo come $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ con p, q interi non entrambi pari

Infatti se per assurdo $\sqrt{2}$ fosse razionale

allora $2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow p^2 = 2q^2 \Rightarrow p^2$ è pari

$\Rightarrow p$ è pari, $p = 2m \Rightarrow 2q^2 = p^2 = (2m)^2 = 4m^2$

$\Rightarrow q^2 = 2m^2 \Rightarrow q^2$ è pari $\Rightarrow q$ pari

Assurdo perché p e q non sono entrambi pari

- I numeri con segno sono stati originariamente introdotti (almeno in Europa) per ragioni di contabilità ([entrate] - [uscite]) può essere sia positivo che negativo
- attenzione: 1 e $0,9999\dots$ sono 2 modi di scrivere lo stesso numero

Infatti: $0,9999\dots = 3 \cdot 0,3333\dots = 3 \cdot \frac{1}{3} = 1$

Più in generale $-27,152 = -27,151999\dots$

master COPY COPISTERIA

- gli algoritmi per le operazioni elementari ($+, -, \times, :$) visti a scuola funzionano solo per numeri con un numero finito di cifre decimali. La definizione di queste operazioni per i numeri reali si fa per approssimazione

- I numeri con un'espansione decimale finita (un numero finito di cifre dopo la virgola) sono quelli della forma $x = \frac{p}{10^k}$

- I numeri con espansione **decimale periodica**
  per esempio $-37,14636363$
  sono esattamente i numeri razionali

  razionale $\Longrightarrow$ periodico

  esempio ~~$\frac{140}{11}$~~ ottengo le cifre di $x = \frac{140}{11}$ facendo la divisione

$$\begin{array}{r|l} 140 & 11 \\ 11 & 12,72 \\ \hline 30 & \\ 22 & \\ \hline 80 & \\ 77 & \\ \hline 30 & \end{array}$$

← da qui in poi i numeri si ripetono

periodico $\Longrightarrow$ razionale

Per esempio $x = 31,2474747\ldots$

$= 31,2 + 0,0474747$

$= \frac{312}{10} + \frac{1}{10} \cdot 47 \cdot 0,010101$

$= \frac{312}{10} + \frac{47}{10} \cdot \frac{1}{99}$ ← razionale

ho usato che $0,[01][01][01]\ldots\ldots = \frac{1}{99}$

Più in generale $0,[001][001]\ldots\ldots = \frac{1}{999}$ e

$0,[0\ldots01][\ \ ][\ \ ]\ldots\ldots = \frac{1}{99\ldots9}$

(k cifre) (k cifre)

Definizione di estremo superiore e inferiore
di un insieme che non si scrive come unione finito di intervalli

Dato $X \subset \mathbb{R}$, $y \in [-\infty, +\infty]$ si dice maggiorante di X se $y \geq x \ \forall x \in X$
e si dice minorante se invece $y \leq x \ \forall x \in X$

pongo $Y^+ = \{ y \in [-\infty \ +\infty] \text{, maggioranti di } X$

$Y^- = \{ y \in [-\infty \ +\infty] \text{, minoranti di } X$



Definisco estremo superiore di X il più piccolo dei maggioranti di X cioè il minimo di Y^+ e l'estremo inf di X è il più grande dei minoranti di X (cioè il massimo di Y^-

Fatto fondamentale (completezza dei Numeri reali)
Sup X e Inf esistono per ogni Insieme $X \subset \mathbb{R}$

master COPY
master COPY COPISTERIA

master COPY

master COPY

Nozioni di base

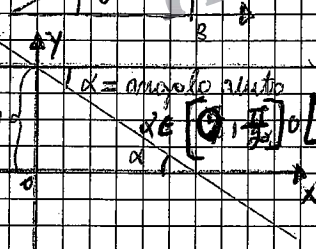
avvertenze di carattere generale Def = dominio di definizione

$\log_2 x = \log_{10} x = \ln x$ e = costante di Nepero e 2,7...

Perché e e non 10? Per semplificare tutte formule: stessa ragione per l'uso di π, Angoli misurati sempre in radianti $\frac{\pi}{2}$ rad

motivo 1 Semplificazione di tutte formule

motivo 2: significato geometrico dell'angolo in radianti



modi lunghezza $\overset{\frown}{AB}$ dove x è la misura in radianti dell'angolo $\overset{\frown}{AB} = R \cdot \theta$

α = angolo retto $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}) \cup [\frac{\pi}{2}, \pi]$, m: coefficiente angolare = pendenza

q: altezza sull'asse y della funzione

$\frac{\Delta Y}{\Delta X} = m = \tan\alpha$

Funzione potenza $Y = X^a$ Dominio: D sottoinsieme di $\mathbb{R}$ insieme di X secondo il quale la funzione è definita

a) a intero $Y = X^2 \longrightarrow D: \mathbb{R}$

$a < 0$ intero $Y = \frac{1}{x^2} \longrightarrow D: \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\forall x \neq 0$

a) a non Intero $x > 0$, $Y = X^{1/2} \longrightarrow Y = \sqrt{X}$ $\mathbb{R}^+$ $D: [0, +\infty[$

$a < 0$ non Intero $x > 0$ $Y = x^{-1/2} \longrightarrow Y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ $D:]0, +\infty[$

Grafici delle funzioni elementari

proprio funzione da considerare in questo caso $f: X \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x)$ con $x \in X$

Rette angolo ottuso [redacted] $0 < \alpha < \pi$

retto $(\frac{\pi}{2})$

giro (2π)

NB senso antiorario ↺ positivo

senso orario ↻ negativo

Potenze $a^0 = 1$ 0^0 non viene definito $0^{\frac{a}{c}} = 0$ con $a, c \neq 0$

se $a > 0$ $b < 0$ $b = -\frac{p}{q}$ p, q interi positivi non nulli $a^b = \frac{1}{q\sqrt{a^p}}$

Si definisce a^b con $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$