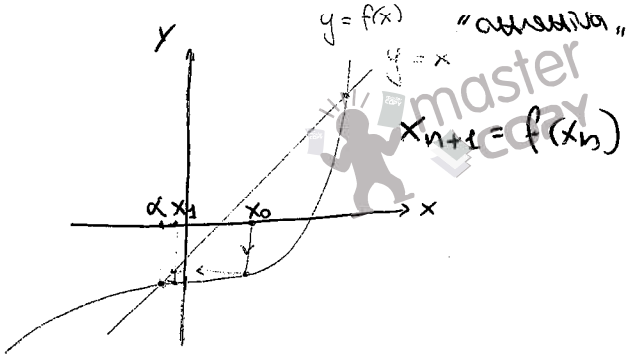
METODI GRAFICI PER TROVARE LE RADICI DI UN'EQUAZIONE NON LINEARE:

$F(x) = 0$ (α è soluzione esatta)

$x_n \to \alpha$

Iterazioni successive

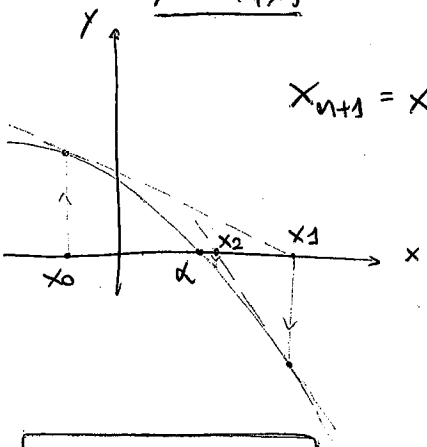
$x = f(x)$ → funzione con radice "attrattiva"



$x_{n+1} = f(x_n)$

Newton o tangenti

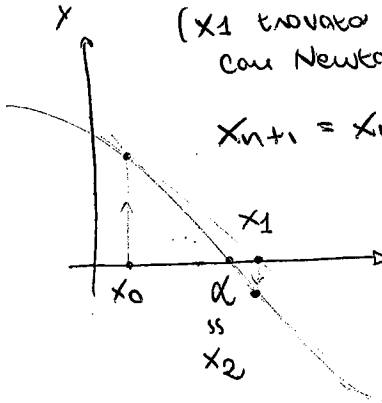
$y = F(x)$



$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)}$$

Secanti o estrapol. lineare

$y = F(x)$



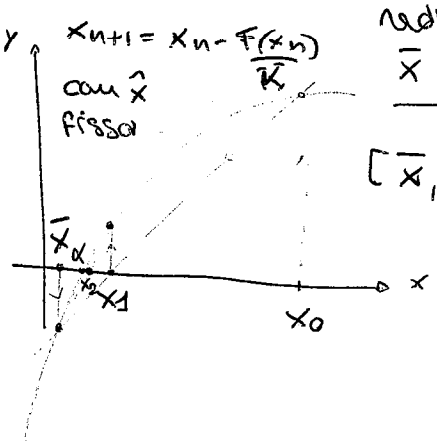
(x_1 trovato con Newton)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{K}$$

rapporto incrementale

Metodo corde

→ con 1 sola radice



$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{K}$

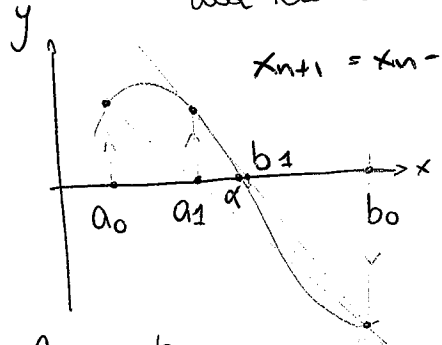
con $\hat{x}$ fissato

$\bar{x}$ fissato.

$[\bar{x}, x_n]$ separano la radice

Regula falsi → converge più velocemente

$[a_0, b_0]$ separano una radice



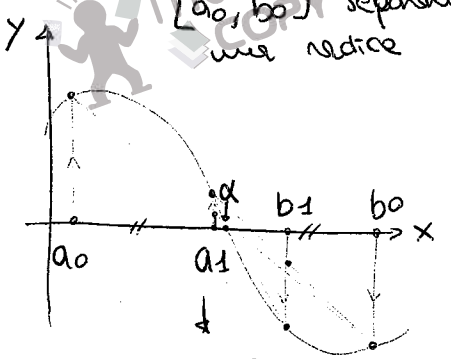
$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{K}$$

$$\frac{F(a) - F(b)}{a - b}$$

a_0 e b_0 noti ⇒ sono prime approssimazioni

Bisezione o dicotomico

$[a_0, b_0]$ separano una radice



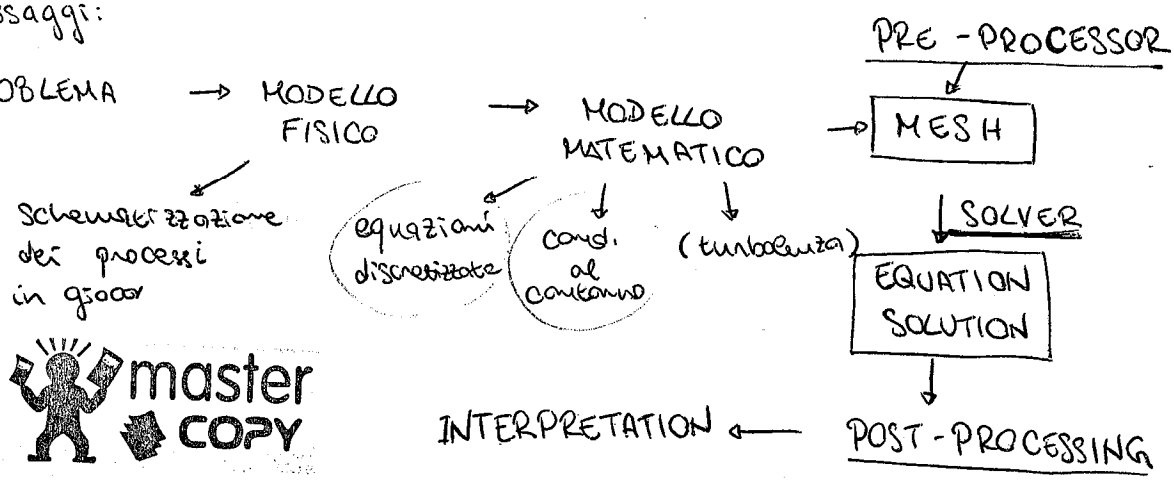
prendo il punto medio della corda creata tra a_n e b_n ⇒ $x_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$

master COPY

- **Residuo**: distanza tra soluzione reale e approssimata.
  La voglia piccola ⇒ cifra uguale ad un $\varepsilon \ll 1$
  Scelta d impostata di default.
  Il residuo non serve più piccolo dell'errore fatto durante la misura ⇒ cifra uguale all'errore sperimentale.

- **CFD**: Computational Fluid Dynamics è l'analisi, tramite l'utilizzo di simulazioni computerizzate, di problemi riguardanti flussi, scambio termico e reazioni chimiche.

  Passaggi:



Posso a dover rifare tutto il processo (o in parte) per vedere quale modello aderisce meglio al mio problema, quale tecnica, se c'è, mi permette di convergere più velocemente e la necessità di infittire la mesh per andare a convergenza.

Le soluzioni analitiche sono disponibili per pochi problemi con condizioni particolari; la sperimentazione e i dati empirici venivano spesso combinati con le equazioni; con il CFD si può potenzialmente risolvere ogni problema.

- Modelli matematici ⟶ necessitano anche di CONDIZIONI AL CONTORNO:

  1) Cond. di Dirichlet → specificano il valore della soluzione (es. temperature alla parete)
  2) Cond. di Neumann → specificano il valore della derivata della soluzione (es. flusso termico alla parete)
  3) Cond. di Cauchy → specificano entrambe le condizioni descritte sopra.

- Assieme al modello deve avere anche un metodo di discretizzazione delle equazioni:

  METODO AGLI ELEMENTI FINITI
  METODO ALLE DIFFERENZE FINITE → derivate ≈ rapporti incrementali
  METODO AI VOLUMI FINITI

Questi sono alcuni dei metodi utilizzati per trasformare le eq. differenziali in algebriche e per poterle risolvere così discretizzate in piccole regioni dello spazio, commettendo errori tanto più grandi quanto più grandi sono gli "spazi" o "intervalli" in cui viene sezionato il dominio di lavoro.
La discretizzazione avviene sia nello spazio che nel tempo, a seconda del problema.

- La discretizzazione temporale, con tutti i metodi, può essere sia implicita ($\beta = 1$) che esplicita ($\beta = 0$), ovvero dipendente e non dipendente dal passo temporale successivo, oppure di Crank - Nicolson ($\beta = 0,5$), intermedia tra le due. Nel caso esplicita le equazioni del sistema discretizzato sono indipendenti temporalmente.

④

- Nella notazione T_m^n il pedice m rappresenta il passo spaziale e n quello temporale.
- La discretizzazione con differenze finite, in caso spaziale, può essere in AVANTI o ALL'INDIETRO:

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_m^n \rightarrow \frac{T_m^n - T_{m-1}^n}{\Delta x} \quad \text{INDIETRO}$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_m^n \rightarrow \frac{T_{m+1}^n - T_m^n}{\Delta x} \quad \text{AVANTI}$$

(Lo faccio anche con il temporale → di solito in avanti)
Queste due discretizzazioni rappresentano bene la derivata nei punti intermedi: $(m+\frac{1}{2})$ e $(m-\frac{1}{2})$.

(A volte m indicato con i).

- Nel caso 1D se voglio risolvere l'equazione nel punto i ho le 3 incognite per i 3 punti:

  $i-1$, i; $i+1$.

Se faccio calcoli in più dimensioni risultano equazioni:

- a 3 punti in 1D
- a 5 punti in 2D
- a 7 punti in 3D

master COPY

⇒ Ho linearizzato i problemi e devo procedere con le tecniche di soluzione di sistemi lineari.

Finita la parte di modello matematico e mesh, passo alla comprensione del solver, vedo algoritmi di risoluzione sist. lineari.

- Risoluzioni di sist. lineari $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\Phi} = \underline{S}$

METODI DIRETTI:

1) Gauss → si trasforma $\underline{\underline{A}}$ in una matrice triangolare superiore e si risolve il sistema.

2) Gauss - Jordan → si trasforma $\underline{\underline{A}}$ in una matrice diagonale e si risolve il sistema.

3) Metodi di fattorizzazione → $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{L}} \cdot \underline{\underline{R}}$ con $\underline{\underline{L}}$ e $\underline{\underline{R}}$ matrici triangolari Sx e dx e risolvo: $\underline{\underline{L}}\underline{\underline{R}} \cdot \underline{\Phi} = \underline{S}$

$\Rightarrow \underline{\underline{L}}\underline{Y} = S$ e $\underline{\underline{R}} \cdot \underline{\Phi} = \underline{Y}$ → trovo prima $\underline{Y}$ attraverso $\underline{\underline{L}}$ e poi trovo $\underline{\Phi}$.

METODI ITERATIVI:

↳ $\left(\underline{\Phi}^{(k)} = \underline{\underline{H}}\, \underline{\Phi}^{(k-1)} + \underline{c} \right)$ ⇒ trovo $\underline{\Phi}^{(k)}$ come approssimazione

Vettore errore: $\underline{\varepsilon}^{(k)} = \underline{\Phi}^{(k)} - \underline{\Phi} = \underline{\underline{H}}^k \cdot \underline{e}^{(0)}$

Il metodo iterativo converge $\Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} \|\underline{\varepsilon}^{(k)}\| = 0 \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} \|\underline{\underline{H}}^k\| = 0$ ovvero $\underline{\underline{H}}$ matrice di iterazione è convergente

La matrice converge se il suo raggio spettrale $\rho(\underline{\underline{H}})$ è minore di 1. Poiché la norma della matrice $\|\underline{\underline{H}}\|$ maggiora il raggio spettrale, se riesco a dimostrare che una norma di $\underline{\underline{H}}$ è < 1 ⇒ la matrice converge, quindi il metodo converge.

Il raggio spettrale è il massimo valore degli autovalori della matrice.

1) Metodo di Jacobi: → $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{D}} - \underline{\underline{E}}$; sistema: $\underline{\underline{D}}\,\underline{\Phi} = \underline{\underline{E}}\,\underline{\Phi} + \underline{S}$

con delle manipolazioni $\underline{\Phi}^{(k)} = \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\Phi}^{(k-1)} + \underline{q}$

con $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{D}}^{-1} \cdot \underline{\underline{E}}$ matrice di iterazione e $\underline{q} = \underline{\underline{D}}^{-1} \cdot \underline{S}$. Affinché il metodo converga $\underline{\underline{A}}$ deve essere DIAG. DOM.