30.09.2021

giovedì 30 settembre 2021 13:16

FENOMENI DI TRASPORTO BIOLOGICO

Tratteremo il trasporto di campi di:

- MASSA
- MOTO
- ENERGIA

] nei fluidi attraverso la meccanica del continuo

Tipi di materia:

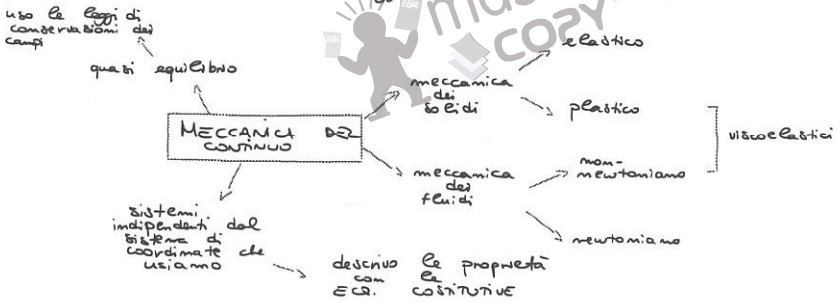
→ SOLIDO: molecole vicine con F elevate che impediscono la separazione; se sposto una particella le altre si muovono con stessa velocità; ha una propria forma

→ LIQUIDO: molecole più separate con F più basse; se sposto una particella si muove solo quella che tocco (non resiste ad uno sforzo di taglio); sono appiccicosi; prende la forma del contenitore

! Siamo considerati INCOMPRIMIBILI, non si può comprimere a T costante

→ GAS: molecole molto lontane; non ha una forma

MECCANICA DEL CONTINUO → studio teorico della materia (opposto della mecc. quantistica), la risoluzione spaziale è maggiore di un atomo, considero l'intero volumetto



TRASPORTO DI ENERGIA

$$E = F \times d$$

non posso trasportare l'Energia potenziale o cinetica, posso trasportare solo: ENERGIA TERMICA ed ENERGIA ELETTRICA

| in un fluido parleremo di trasporto di CALORE

TRASPORTO → movimento di calore Q [J]

↓ quantità di calore che passa in un'unità di superficie in una quantità di tempo

$$\frac{J}{m^2 s}$$

TRASPORTO DI MASSA:

$$\frac{Kg}{m^2 s}$$

TRASPORTO DI MOTO:

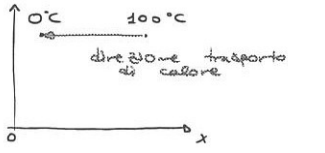
$$\frac{massa \times vel}{m^2 \cdot s}$$

- $\frac{J}{m^2 s}$ FLUSSO DI CALORE
- $\frac{Kg}{m^2 s}$ FLUSSO DI MASSA
- $\frac{massa \times vel}{m^2 s}$ FLUSSO DI MOTO

! "FLUX" = flusso → trasporto di qualcosa per sup. per tempo

Il trasporto deriva da una differenza nello spazio

- $-\frac{dT}{dx}$ differenza di temperatura
- $-\frac{dc}{dx}$ differenza di concentrazione
- $-\frac{dv}{dx}$ differenza di velocità



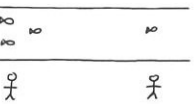
| sempre opposto al flusso

Φ= entità trasportata	FLUSSO	GRADIENTE (forza motrice)	Equazione costitutiva	Nome Eq. costitutiva
MASSA: M	$\frac{M}{m^2 s}$	$-\frac{\partial C}{\partial x}$	$J = -D\frac{\partial c}{\partial x}$	FICK
ENERGIA: Q (termica)	$\frac{Joule}{m^2 s}$	$-\frac{\partial T}{\partial x}$	$Q = -k\frac{\partial T}{\partial x}$	FOURIER
MOTO: M*v	$\frac{Mv}{m^2 s}$	$-\frac{\partial V}{\partial x}$	$\tau = -\mu\frac{\partial v}{\partial x}$	NEWTON

La materia si può studiare con due QUADRI di RIFERIMENTO secondo: Euler, Lagrange

definisco un volumetto fisso e vedo come cambia nel tempo se ho due persone nello stesso tempo possono vedere cose diverse

prendo il volumetto e lo seguo per vedere cosa succede: vario spazio e tempo



Euleriano: osserviamo un sistema da fermi mentre le particelle (o l'energia o altro) scorrono.

Lagrangiano: invece di fissare lo stesso osservatore di Eulero da fermo, riosservarmo lo stesso punto seguendo il baricentro. Si tratta quindi di seguire il sistema nel suo "percorso", fissando una modalità nello spazio. Computazionalmente è più difficile.

- Ripasso:

SCALARE → solo ampiezza

VETTORE → ampiezza e direzione

TENSORE → ampiezza, direzione e superficie di riferimento

ci devono dare lo stesso risultato in un dato momento in un dato spazio

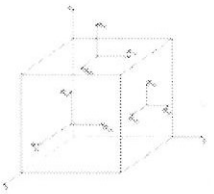
Tensore zero grado T_0

T_1

T_2

$$\underline{\underline{\tau}} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

per i nostri materiali (INROTAZIONALI, non ruotano sul proprio asse) il tensore è SIMMETRICO



- Operatori

GRADIENTE ∇T

Il gradiente di una funzione scalare è la sua derivata nello spazio, quindi è un vettore che rappresenta l'ampiezza e la direzione in cui la funzione ha la massima derivata (ovvero delle variazioni maggiori).

Usiamo l'operatore nabla "∇" (in inglese Del) per il gradiente.

$$\nabla f = \left[i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z} \right] f$$

Per esempio, il gradiente di pressione è

$$\nabla p = i\frac{\partial p}{\partial x} + j\frac{\partial p}{\partial y} + k\frac{\partial p}{\partial z} = \left(\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z} \right)$$

NB: il gradiente di un vettore è invece un tensore (es. $\nabla \bar{v}$).

il risultato è un vettore

∇ aumenta il grado del tensore

DIVERGENZA $\nabla \cdot \bar{v}$

La divergenza è la somma delle derivate, nello spazio, di un vettore o un tensore. La divergenza di un vettore e' uno scalare. La divergenza di un tensore e' un vettore.

In particolare, la divergenza di un vettore è un campo scalare e rappresenta l'uscita del campo dal punto (es. campo di velocità). In altre parole, è una misura della quantità di campo che esce (divergenza positiva +) o entra (divergenza negativa -) da un punto per unità di tempo.

$$\nabla \cdot \bar{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

In forma matriciale: $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$ (scalare)

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\tau}} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} =$$

$$\left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z}, \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z}, \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right)$$

la divergenza diminuisce il grado del tensore (diventa un vettore)

LAPLACIANO $\nabla^2 \phi = \nabla \cdot (\nabla \phi)$

master COPY
master COPY COPISTERIA

Laplaciano ∇^2 (in inglese "Del squared"). La ∇^2 può essere definita come la divergenza del gradiente, ovvero come somma della seconda derivata nello spazio.

Più difficile da spiegare in termini fisici, è una misura di quanto è diversa la funzione tra un punto e l'altro (cioè la seconda derivata!)

è un'operazione su uno scalare

$$\nabla^2 \phi = \nabla \cdot (\nabla \phi) = \nabla \bar{\psi}$$

(div. vettore) → mi restituisce uno scalare

Per uno scalare s:

$$\nabla^2 s = \nabla \cdot \nabla s = \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2}$$

Per un vettore (es. $\bar{v}$) invece la ∇^2 deve essere definita in ogni direzione.

$$\nabla^2 \bar{v}\big|_x = \nabla \cdot \nabla \bar{v}\big|_x = \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2 \bar{v}\big|_y = \nabla \cdot \nabla \bar{v}\big|_y = \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2 \bar{v}\big|_z = \nabla \cdot \nabla \bar{v}\big|_z = \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}$$

master COPY COPISTERIA

In un sistema cartesiano: $\nabla^2\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$

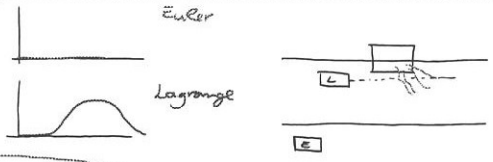
In coordinate cilindriche: $\nabla^2\Phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$

In coordinate sferiche: $\nabla^2\Phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}$

coordinate cilindriche → per studiare i vasi, variazioni in z e r $\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)$

coordinate sferiche → solo in r $\nabla^2 T = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)$

Esempio: se ho un fiume e una fabbrica che emana una sostanza nel fiume a seconda di dove mi trovo ho percezioni diverse della sostanza. Per Euler dato che sono fermo se sono lontano dalla fabbrica non lo sento, mentre se sono subito dopo lo sento sempre; per Lagrange dato che sono in movimento su una barca in dei momenti sento la sostanza e in alcuni no.



DERIVATA MATERIALE

$$\frac{Dc}{Dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + \bar{v}\cdot\nabla c = \frac{\partial c}{\partial t} + \bar{v}\frac{\partial c}{\partial x}$$

La concentrazione può variare nel tempo e nello spazio

La **derivata materiale** è la derivata nel tempo di una funzione caratteristica di una particella di fluido sottoposto ad una velocità. E' nota anche come *derivata Lagrangiana* o *derivato sostanziale* (derivata nel tempo di una funzione mentre viene seguita una particella di fluido).

$$\frac{D\Psi}{Dt} = \frac{\partial\Psi}{\partial t} + \bar{v}\cdot\nabla\Psi$$

(L: $\frac{\partial\Psi}{\partial t}$, E: $\bar{v}\cdot\nabla\Psi$)

NB: Per cui l'accelerazione è la derivata materiale della velocità. L'accelerazione infatti può essere anche scritta come:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt}$$

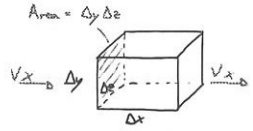
$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{\partial\bar{v}}{\partial t} + \bar{v}\cdot\nabla\bar{v} = \frac{D\bar{v}}{Dt}$$

$\frac{Dv}{Dt}$ è l'accelerazione di un fluido

master COPY
master COPY COPISTERIA

→ EQUAZIONE DI CONTINUITÀ

Consideriamo un volume fisso nello spazio



$\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$ cost

come aumenta la massa?

$$m = \rho \cdot vol = \rho\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$$

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \frac{\partial(\rho\,\Delta x\Delta y\Delta z)}{\partial t} = \Delta x\Delta y\Delta z\frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{\text{massa}}{t}\Big|_{in} - \frac{\text{massa}}{t}\Big|_{out}$$

$$\text{Flusso di massa} = \rho\frac{\Delta x\,\Delta y\,\Delta z}{t} = \rho\cdot\bar{v} = \frac{\text{massa}}{m^3\cdot vol}\cdot\frac{m}{s} = \frac{\text{massa}}{m^2 s}$$

DENSITÀ

$\left.\frac{\text{massa}}{\epsilon}\right|_{IN} = \rho \bar{V}_x \cdot \Delta y \Delta z \Big|_{IN}$ (parete da cui entra) $\qquad \left.\frac{\text{massa}}{\epsilon}\right|_{OUT} = \rho \bar{V}_x \cdot \Delta y \Delta z \Big|_{OUT}$

$$\Delta x \Delta y \Delta z \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = \rho \bar{V}_x \Delta y \Delta z \Big|_{IN} - \rho \bar{V}_x \Delta y \Delta z \Big|_{OUT}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\rho \bar{V}_x \Delta y \Delta z \Big|_{IN} - \rho \bar{V}_x \Delta y \Delta z \Big|_{OUT}}{\Delta x \Delta y \Delta z}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\rho \bar{V}_x |_{IN} - \rho V_x |_{OUT}}{\Delta x} \qquad \text{per } \Delta x \to 0, \ \rho \text{ fisso}$$

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial \rho \bar{V}_x}{\partial x}} \quad \text{eq. su } x$$

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} = \underbrace{-\nabla \cdot (\rho \bar{v})}_{\text{div. di } -\rho} = \ominus \bar{v} \cdot \nabla \rho - \rho \nabla \bar{v}}$$

(⊖ derivato sul fatto che facendo IN − OUT) — eq. generale

per i liquidi incomprimibili $\nabla \rho = 0 \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ non può cambiare nel tempo e nello spazio $\Rightarrow \nabla \rho = 0$ e $\nabla \cdot \bar{v} = 0$ (div $\bar{V} = 0$)

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} = -\frac{\partial V_y}{\partial y}$$ conservazione di massa

Se T cost e il fluido è incomprimibile ρ non cambia nel tempo e nello spazio

master COPY COPISTERIA

master COPY

07.10.2021

giovedì 7 ottobre 2021 08:47

La velocità è una funzione in relazione a tempo e spazio

$$\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t), \ \vec{v} = iv_x + jv_y + kv_z = i\frac{dx}{dt} + j\frac{dy}{dt} + k\frac{dz}{dt}$$

La differenziale della velocità è:

$$d\vec{v} = \underbrace{\frac{\partial \vec{v}}{\partial x}}_{V_x} dx + \underbrace{\frac{\partial \vec{v}}{\partial y}}_{V_y} dy + \underbrace{\frac{\partial \vec{v}}{\partial z}}_{V_z} dz + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} dt \qquad \text{Eq. (1)}$$

Adesso posso ricavarmi anche l'accelerazione

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial x}v_x + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y}v_y + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}v_z + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{v}\cdot\nabla\vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$$

l'accelerazione è uguale alla derivata materiale della velocità

$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ è un termine di accelerazione locale di tipo newtoniano, invece il termine $\vec{v}\cdot\nabla\vec{v}$ si applica solo per i fluidi: è un'accelerazione che avviene nello spazio quando cambia lo spazio del campo di velocità, ad esempio quando cambiamo le sezioni e le forme di tubi.

→ Mette in relazione Eulero e Lagrange

Sperimentalmente trovare il vettore velocità è difficile quindi useremo:

- **VELOCITÀ MEDIA**

Data una superficie



$$\bar{V}_m = \frac{1}{A}\int \vec{v}\cdot\hat{n}\,dA$$

! Se il flusso è $\perp$ A
$\bar{V}_m = \bar{V} = \frac{1}{A}\int V\,dA$

- **FLUSSO VOLUMETRICO**

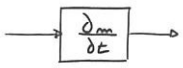
$$Q_{vol} = \int \vec{v}\cdot\hat{n}\,dA \left[\frac{m^3}{s}\right]$$

- **FLUSSO DI MASSA**

$\vec{v}\cdot\rho$ densità $\left[\frac{kg}{m^2\cdot s}\right]$

- **FLUSSO DI MASSA MEDIO**

$\bar{V}_{media}\cdot\rho$



$$\nabla\vec{v} = 0$$

$$\frac{dV_x}{dx} + \frac{dV_y}{dy} + \frac{dV_z}{dz} = 0$$

La massa non cambia per tempo quindi

ingresso = uscita

$$\rho\,\bar{v}\,A\big|_{IN} = \rho\,\bar{v}\,A\big|_{out}$$

$$VA\big|_{IN} = VA\big|_{OUT}$$

Il flusso volumetrico IN = flusso volumetrico OUT

! Flusso SANGUE = 5 l al minuto $\sum$ flusso aorta = $\sum$ flussi in tutti i capillari

dimensioni capillari $\varnothing$ 8 μm, V = 1 mm/s, e = 1 mm

$$Q_{aorta} = \sum_1^N V_c A_c = n\,V_c A_c \approx 10^8 / 10^{-4}$$

Se consideriamo un condotto in cui passa un fluido

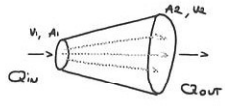
LINEA DI FLUSSO STREAMLINES → linea tg ad ogni vettore velocità del punto

! Le linee di flusso non si incrociano



mi permettono di vedere la velocità in un punto

più sono concentrate più sono veloci



$Q_{in} = A_1 V_1$

$Q_{out} = A_2 V_2$

$A_1 V_1 = A_2 V_2$ se $A_1 < A_2 \rightarrow V_1 > V_2$

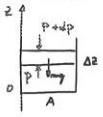
$Q_{in} = Q_{out}$ per continuità

Se prendo una sezione ci metto nel tempo non vedo il cambiamento di V, ma nello spazio lo noto

→ TRASPORTO DI MOTO

IDROSTATICA: ho un fluido con velocità nulla

! la Pressione è uno SCALARE



Voglio fare un bilancio di F di un sistema in equilibrio

$\Sigma F = 0$

Pressione

$$(P + dP)\,A + mg = PA$$

$$(P + dP)\,A + g\,\rho\,A\,dz = PA$$

$$P + dP + g\rho\,dz = P$$

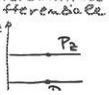
$$\boxed{dP + \rho g\,dz = 0}$$ eq. idrostatica differenziale

se dico che:

$$dp = -\rho g\,dz$$

con $\int_{P_0}^{P} dp = -\rho g \int_0^z dz$ posso integrare

$$P - P_0 = -\rho g z$$



$$\Rightarrow \boxed{P = \rho g h}$$ eq. integrale si riferisce al