

Riguarda il trasporto di tre quantità: massa, moto e energia.

In particolare andremo ad analizzare il trasporto di questi elementi, che sono campi, all'interno dei fluidi.

Stati della materia

Solido	Presenta molecole vicine tra loro, tra le molecole sono presenti forze elevate, tali da non permetterne una facile separazione	Il fatto che le particelle siano vicine tra loro fa in modo che quando andiamo a spostare un solido tutte le particelle si muovono allo stesso modo, hanno tutte la stessa velocità	Hanno una forma propria che non può cambiare a meno di applicare una forma molto importante
Liquido	Le molecole sono più lontane tra loro, le forze presenti tra molecole hanno un'intensità importante, ma non sufficientemente elevata da non riuscire a separarle	Quando cerchiamo di spostare un fluido, andranno a spostarsi solo le molecole che tocchiamo direttamente. Il fluido non si muove come un'entità unica, ma le particelle si separano in seguito all'applicazione di una forza.	Non hanno una forma propria, ma assumono la forma nel contenitore in cui si trovano
Gas	Le molecole sono molto lontane le une dalle altre e non sono presenti interazioni (nei gas ideali le particelle si muovono in modo indipendente)		Non hanno una forma propria e tendono ad occupare tutto lo spazio a disposizione

Liquidi e gas sono considerati fluidi, sono quelli che noi andremo ad analizzare, concentrandoci in modo particolare sui liquidi.

In termini formali si dice che un fluido non resiste allo scorrimento, ovvero non resiste all'applicazione di una forza di taglio, infatti applicando una forza, ogni particella avrà una sua velocità.

Altra caratteristica dei liquidi è il loro essere appiccicosi.

Inoltre i liquidi sono considerati incompressibili, ovvero non possono essere schiacciati a una temperatura costante, non possiamo cambiare il suo volume se la temperatura rimane costante.

Andremo quindi a studiare il trasporto di massa, moto e energia all'interno dei fluidi.

Studieremo i fluidi e il trasporto di campi al loro interno utilizzando la meccanica del continuo.

La **meccanica del continuo** è una forma di studio teorica della materia che si contrappone alla meccanica quantistica, infatti non si studia la materia come formata da atomi o punti molecolari, ma studiamo la materia come un continuo.

La risoluzione spaziale che usiamo è molto maggiore della grandezza dell'atomo quindi ogni elemento sarà analizzato come continuo, quindi le proprietà non differiscono da un punto all'altro nel volumetto che andiamo a considerare. Nella meccanica del continuo tutto il sistema è inteso come un continuo, ogni elemento si comporta come il sistema nella sua interezza.

La meccanica del continuo, quando studiata nei solidi viene definita meccanica dei solidi. Abbiamo analizzato il comportamento di materiali solidi elastici (più semplici da studiare), ci sono anche materiali che presentano un comportamento plastico.

La meccanica del continuo applicata ai fluidi si definisce **meccanica dei fluidi**. All'interno della meccanica dei fluidi troviamo fluidi con comportamento lineare, detti newtoniani, e fluidi che presentano un comportamento non lineare, chiamati non newtoniani.

Sul confine tra solido e fluido troviamo i materiali viscoelastici (biomeccanica), un cui abbiamo una componente di fluidità, ma si tratta di un elemento solido.

Noi vogliamo fare in modo che i sistemi studiati siano indipendenti dalle coordinate, o dal sistema di coordinate che utilizziamo.

Andremo ad analizzare le proprietà della materia, che dipendono dal tipo di materiale: acqua, alcool, miele, aria...

Queste proprietà vengono descritte utilizzando le equazioni costitutive, ovvero equazioni che descrivono il comportamento di materiali specifici.

Quando studiamo i sistemi, tramite sistemi di equazioni, andremo a considerare i volumetti in una condizione di equilibrio e quasi-equilibrio, andremo a fare dei piccoli spostamenti attorno alla posizione di equilibrio, e applichiamo delle leggi di conservazione dei campi (moto, massa e energia).

Trasporto di energia ($F \times d$)

I tipi di energia che andremo ad analizzare, cinetica o potenziale, saranno tipi di energia che non possiamo trasportare, ma che volendo possiamo convertire. I tipi di energia che riusciamo a trasportare sono l'energia elettrica e l'energia termica. L'energia termica può essere trasportata ad esempio attraverso una ventola, o mettendo insieme un oggetto caldo con un oggetto freddo.

Quando parliamo di trasporto di energia in un fluido ci riferiamo al trasporto di calore.

Noi considereremo sempre $\text{Energia} = \text{Calore}$

Come viene trasportato il calore? E cosa vuol dire trasportare il calore?

Per **trasporto** si intende il movimento di calore Q (Joule), la quantità di calore che passa attraverso l'unità di superficie in un'unità di tempo \rightarrow flusso di energia (calore)

$$\frac{J}{m^2 \cdot s} \quad - \quad \frac{\partial T}{\partial x}$$

Per analogia il trasporto di massa sarà la quantità di kilogrammi (moli) che attraversa un'unità di superficie in un'unità di tempo \rightarrow flusso di massa

$$\frac{kg}{m^2 \cdot s} \quad - \quad \frac{\partial C}{\partial x} \quad C = \text{concentrazione}$$

Trasporto di moto sarà la quantità di moto che attraversa un'unità di superficie in un'unità di tempo \rightarrow flusso di moto

$$\frac{\text{massa} \cdot \text{vel}}{m^2 \cdot s} \quad - \quad \frac{\partial V}{\partial x} \quad V = \text{quantità di moto}$$

In generale con flusso definiamo la quantità di campo che attraversa l'unità di superficie nell'unità di tempo, in inglese si usa il termine 'flux'.

$$\frac{\Phi}{m^2 \cdot s}$$

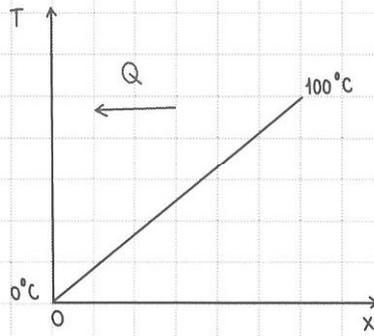
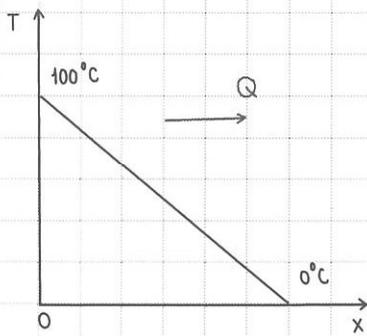
Quello che fa spostare il calore è una differenza di temperatura nello spazio.

La stessa cosa vale per il trasporto di massa (concentrazione) e di moto.

Tutto questo avviene per una condizione di equilibrio e per massimizzare l'entropia del sistema.

Quello che fa spostare il moto è una differenza di velocità nello spazio.

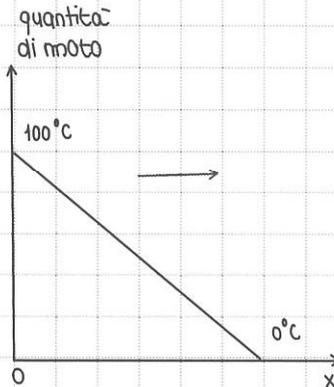
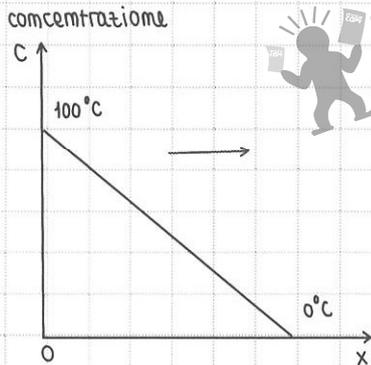
Perché c'è il meno?



Direzione in cui aumenta la temperatura, la direzione del trasporto sarà uguale e opposta, il calore si sposta dalla zona più calda a quella più fredda

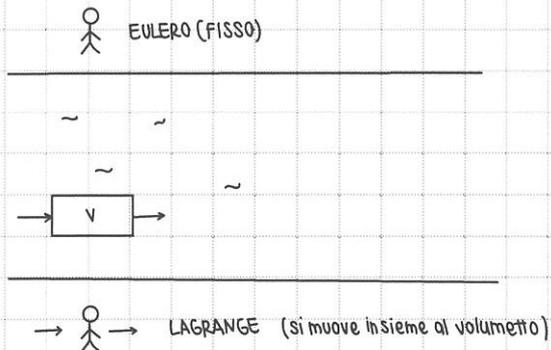
$$Q \propto - \frac{dT}{dx}$$

La stessa cosa vale anche per la massa e per la quantità di moto.



Nella meccanica del continuo ci sono due modi per studiare la materia, due quadri di riferimento: metodo/quadro di riferimento di Euler e metodo/quadro di riferimento di Lagrange.

Questi due metodi per studiare la materia sono diversi.



Se consideriamo un fiume, e ne analizziamo un volumetto, nel sistema di Eulero, nello spazio ci fissiamo su un volumetto, lo definiamo e andiamo a vedere cosa succede al volumetto. Il volumetto è fisso nello spazio e noi vediamo come cambia nel tempo. Questo metodo è più utilizzato.

Lagrange va a considerare un volumetto e lo segue studiando cosa succede al volumetto identificato, andando quindi a muoversi sia nello spazio che nel tempo. Questo metodo è più oneroso dal punto di vista computazionale.

È fondamentale che i due metodi ci diano lo stesso risultato in un momento dello spazio e del tempo, quindi i due modelli sono equivalenti fissato il momento e lo spazio.

Noi andremo ad utilizzare il metodo di Eulero.

Scalare -> ampiezza (tensore di grado 0)

Vettore -> ampiezza, direzione (tensore di 1 grado) \underline{v} \bar{v}

Tensore -> ampiezza, direzione, superficie di riferimento (tensore di 2 grado) $\underline{\underline{\tau}}$ $\bar{\bar{\tau}}$

Tensore: $\underline{\underline{\tau}} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$



I tensori sono simmetrici rispetto ai materiali, sono irrotazionali, non variano facendo rotazioni del sistema attorno al proprio asse.

Gli elementi di un tensore sono caratterizzati da due pedici, il primo ci da informazioni sul piano su cui è applicato lo sforzo, mentre il secondo pedice indica la direzione dello sforzo.

Operatori matematici:



1) GRADIENTE

Il gradiente si applica solitamente a scalari, ad esempio alla temperatura.

Per gradiente si indica la direzione a ampiezza del massimo valore che una funzione assume in un punto nello spazio. Operando in questo modo su uno scalare, il risultato sarà un vettore, caratterizzato da direzione e ampiezza.

$$\nabla f = \left[i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \right] f$$

∇ -> nabra

Esempio: il gradiente di pressione: $\nabla p = i \frac{\partial p}{\partial x} + j \frac{\partial p}{\partial y} + k \frac{\partial p}{\partial z} = \left(\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z} \right)$

Questo operatore trasforma uno scalare in un vettore, l'operatore gradiente aumenta il grado del tensore. Facendo quindi il gradiente di un vettore da un punto di vista matematico avremo come risultato un tensore.

2) DIVERGENZA

La divergenza è un operatore che viene solitamente applicato su un vettore, ad esempio sulla velocità.

Fisicamente la divergenza è la somma di tutti i gradienti in un determinato punto.

La divergenza della velocità è:

$$\nabla \cdot \bar{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

In forma matriciale: $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$

L'operatore divergenza diminuisce il grado del tensore, il vettore diventa uno scalare.

Per analogia avremo che la divergenza di un tensore è un vettore.

3) LAPLACIANO

Si può pensare il Laplaciano di un certo campo come la divergenza del gradiente del campo stesso.

$$\nabla^2 \Phi = \nabla \cdot (\nabla \Phi)$$

Normalmente questa operazione viene fatta su scalari, e si ottiene come risultato uno scalare.

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \quad \rightarrow \text{in coordinate cartesiane}$$

L'operatore Laplaciano può anche essere espresso in coordinate sferiche e cilindriche:

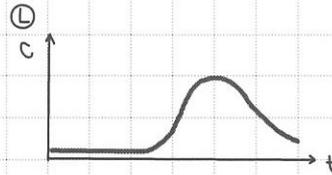
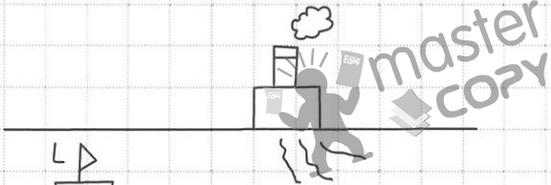
$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) \rightarrow \text{in coordinate sferiche, considerando solo variazioni lungo il raggio (spazi sferici)}$$

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \rightarrow \text{in coordinate cilindriche, trascurando le variazioni lungo } \theta \text{ (vasi)}$$

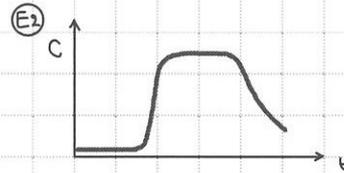
DERIVATA MATERIALE

Il modo per rappresentare l'uguaglianza tra due sistemi, Euler e Lagrangiano, avviene attraverso la derivata materiale.

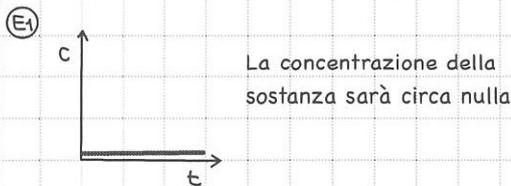
Immaginiamo di considerare un fiume, sulla cui riva è presente una fabbrica che rilascia una certa tossina.



La barca segue il fiume, inizialmente la concentrazione di tossine è nulla, una volta superata la fabbrica aumenta, e poi decade quando si trova sufficientemente lontano dalla fabbrica.



La concentrazione di tossine è nulla la mattina quando la fabbrica non è ancora aperta, la concentrazione inizia ad aumentare e poi potrebbe diminuire.



Tutti i sistemi forniscono informazioni diverse, ma devono essere equivalenti, ovvero devono darci le stesse informazioni nello stesso spazio e tempo.

Il modo per rappresentare l'uguaglianza tra due sistemi è attraverso la **derivata materiale**:

$$\frac{D\Psi}{Dt} = \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \bar{v} \cdot \nabla \Psi$$

Questo ci dice che il campo (ad esempio concentrazione di tossine nel fiume) può variare nel tempo, ma può variare anche dello spazio.

Nel caso di un fluido possiamo definire anche la derivata materiale della velocità. La velocità. Può variare nel tempo e dello spazio nei fluidi (mentre abbiamo visto che le particelle che formano i solidi si muovono tutte insieme, quindi la velocità rimane la stessa nello spazio). Per i fluidi dobbiamo considerare che la velocità varia sia nel tempo che nello spazio, ossia o quindi scrivere:

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{v} \cdot \nabla \bar{v} = \frac{D\bar{v}}{Dt} \rightarrow \text{derivata materiale della velocità è l'accelerazione in un fluido}$$

