Fenomeni di Trasporto Biologico

STUDIO nell'ambito della MECCANICA DEL CONTINUO ovvero studio di GRUPPI DI MOLECOLE COME SINGOLE IDENTITÀ.

SISTEMA STAZIONARIO = INVARIANTE NEL TEMPO
(o QUASI STAZIONARIO)

CONDIZIONI DI QUASI EQUILIBRIO = [Σ FORZE TOTALI $= \emptyset$]

REGIME → LAGRANGIANO sistema in cui si analizza una particella nello spazio
↳ EULERIANO analizziamo il CAMBIAMENTO NEL TEMPO di UN VOLUME COSTANTE nello SPAZIO (ovvero fino le COORDINATE SPAZIALI e vedo come varia nel tempo)

↑
NOI USIAMO QUESTO

Parliamo di TRASPORTO di:

- MOTO: spostamento di un fluido dato una spinta. Vedo come LA SPINTA SI PROPAGA NEL FLUIDO (TRASPORTO ATTIVO).
  Guardo come varia il prodotto $m \cdot v$ (massa per velocità)
- MASSA: spostamento di molecole in un mezzo (DIFFUSIONE o TRASPORTO PASSIVO)
  Guardo come varia la massa m
- ENERGIA: trasporto di energia sotto forma di CALORE (senza flusso di energia si trasferisce) Guardo come varia l'energia Q (CALORE)

Unità di misura:
- $mv \rightarrow Kg\ m/s$
- $m \rightarrow Kg$
- $Q \rightarrow J = Nm = Kg\ \frac{m}{s^2}\ m$

CONCETTO DI FLUSSO

FLUSSO = Trasporto di qualcosa ATTRAVERSO UN'AREA NELL'UNITÀ DI TEMPO

NB FLUSSO $\neq$ $\frac{\text{VOLUME}}{\text{TEMPO}}$ ⚠

$$\text{FLUSSO} = \frac{\text{QUALCOSA}}{\text{TEMPO} \cdot \text{AREA}}$$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Ci sono due concetti da distinguere:

- FLOW = FLUSSO VOLUMETRICO = $\frac{\text{VOLUME}}{\text{TEMPO}}$ $\left[\frac{m^3}{s}\right]$
- FLUX = FLUSSO = $\frac{\text{QUALCOSA}}{\text{TEMPO AREA}}$ → MOTO, MASSA o ENERGIA
  - $\frac{mv}{t \cdot A}$ = FLUSSO DI MOTO $\left[\frac{Kg\ \frac{m}{s}}{s \cdot m^2} = \frac{Kg}{m\ s^2}\right]$
  - $\frac{m}{t \cdot A}$ = FLUSSO DI MASSA $\left[\frac{Kg}{s \cdot m^2}\right]$
  - $\frac{Q}{A\ t}$ = FLUSSO DI CALORE $\left[\frac{J}{s\ m^2}\right]$

Il FLUX/FLUSSO è causato da VARIAZIONI NELLO SPAZIO E NEL TEMPO di:

- F. di MASSA: causato da Δ di CONCENTRAZIONE
- F. di MOTO: causato da Δ di VELOCITÀ
- F. di ENERGIA: causato da Δ di TEMPERATURA

} Δ = GRADIENTE o VARIAZIONE

La VARIAZIONE che genera un flusso è detta DRIVER o GENERATORE.
La direzione del flusso, rispetto alle due zone tra le quali si è verificato è:

- CALDO → FREDDO per ENERGIA
- ALTA CONCENTRAZIONE → BASSA CONC per MASSA
- PIÙ VELOCE → PIÙ LENTO per MOTO
  (Quando la zona di fluido più veloce trasferisce la sua velocità alla zona di fluido più lenta in modo tale da raggiungere la stessa velocità)

NB VELOCITÀ = VETTORE
MASSA = SCALARE
ENERGIA = SCALARE

master COPY

EQUAZIONI COSTITUTIVE DI UN SISTEMA

MOTO $\tau = -\mu \frac{dv}{dx}$ EQUAZIONE DI NEWTON (gradiente di velocità)

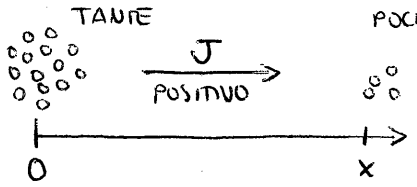
MASSA $J = -D \frac{dc}{dx}$ EQUAZIONE DI FICK (gradiente di concentrazione)

CALORE $Q = -K \frac{dT}{dx}$ EQUAZIONE DI FOURIER (gradiente di temperatura)

$\frac{da}{dx}$ = GRADIENTE

MASTER CO
Tel. 050 831212
Cell. 388 983774

NB IL FLUSSO HA SEGNO OPPOSTO AL GRADIENTE



$$\frac{dc}{dx} = \frac{c(x) - c(0)}{x - 0} \rightarrow \frac{dc}{dx} < 0$$

($c(x) - c(0) < 0$ e $x - 0 > 0$)

- J POSITIVO (NELLA DIREZIONE DI X)
- $\frac{dc}{dx}$ NEGATIVO

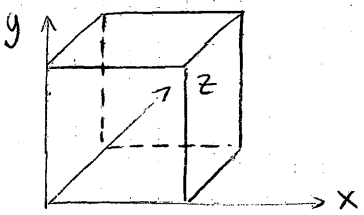
} $\rightarrow \frac{dc}{dx} \propto -J$

master COPY

CONCETTI MATEMATICA DI BASE: TENSORI

TENSORI → grado 0: SCALARE → solo modulo (ampiezza)
→ grado 1: VETTORE → direzione, modulo e verso
→ grado 2: TENSORE: vettori con una SUPERFICIE DI RIFERIMENTO

Nello studio del trasporto usiamo la MATRICE DEI TENSORI DI SFORZO che descrive, ipotizzando un cubo in $\mathbb{R}^3$ TUTTE FORZE CHE AGISCONO SU OGNI FACCIA DEL CUBO:



$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

σ_{ij} i = IDENTIFICA LA FACCIA INDICANDO LA DIREZIONE RISPETTO ALLA QUALE LA FACCIA È PERPENDICOLARE

j = DIREZIONE DELLO SFORZO (FORZA)



MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Possiamo distinguere:

- PRESSIONI: σ_{ii} forze PERPENDICOLARI ALLE SUPERFICI CHE VANNO VERSO DI ESSE
- SFORZI DI TAGLIO: σ_{ij} forze PARALLELE ALLE SUPERFICI CHE VANNO LUNGO DI ESSE

Unità di misura: $[\sigma_{ij}] = [\sigma_{ii}] = \frac{N}{m^2} = Pa$

GRADIENTI E DIVERGENZA

Abbiamo, quindi, che:

- $\tau = -\mu \frac{dv}{dx}$ VELOCITÀ / VETTORE → GRADIENTE DI VELOCITÀ / TENSORE

$$v = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \qquad \tau = -\mu \cdot \begin{pmatrix} \frac{d}{dx}v_x & \frac{d}{dx}v_y & \frac{d}{dx}v_z \\ \frac{d}{dy}v_x & \frac{d}{dy}v_y & \frac{d}{dy}v_z \\ \frac{d}{dz}v_x & \frac{d}{dz}v_y & \frac{d}{dz}v_z \end{pmatrix}$$

- $J = -D \frac{dc}{dx}$ CONCEN. / SCALARE → GRADIENTE DI CONC. / VETTORE

$$J = -D \begin{pmatrix} \frac{dc}{dx} \\ \frac{dc}{dy} \\ \frac{dc}{dz} \end{pmatrix}$$

- $Q = -K \frac{dT}{dx}$ ENERGIA / SCALARE → GRADIENTE DI TEMPERATURA / VETTORE

$$Q = -K \begin{pmatrix} \frac{dT}{dx} \\ \frac{dT}{dy} \\ \frac{dT}{dz} \end{pmatrix}$$

In generale il GRADIENTE è indicato con il seguente operatore:

$$\nabla\Psi = \frac{\partial\Psi}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial\Psi}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial\Psi}{\partial z}\hat{k} = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\Psi =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\Psi = \left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}, \frac{\partial\Psi}{\partial y}, \frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)$$

La divergenza invece si intende la somma delle derivate nello spazio di un vettore. La divergenza è uno scalare e rappresenta il bilancio tra campo entrante (negativo) e uscente (positivo) in un pto per unità di tempo.

$$\operatorname{div} v = \underset{\text{scalare}}{\nabla \circ \bar{v}} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad \text{(scalare)}$$

se $\circ \operatorname{div} v < 0$ entrata

$\circ \operatorname{div} v > 0$ uscita

master COPY

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

NB div (vettore) → scalare

div (tensore) → vettore

LAPLACIANO

Può anche unito come la divergenza del gradiente

$$\nabla^2\phi = \underset{\text{grad.}}{\nabla} \circ \underset{\text{gradiente di } \phi}{\nabla\phi} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\begin{pmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial x} \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} \\ \frac{\partial\phi}{\partial z} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

LAPLACIANO (somma deriv. seconde) in coordinate cartesiane

In coordinate sferiche la formula è:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\sigma}\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\sin\sigma\frac{\partial\phi}{\partial\sigma}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\sigma}\frac{\partial^2\phi}{\partial^2\varphi} = \nabla^2\phi$$

dove, considerando solo variazioni lungo il raggio, si riduce a:

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)$$

master COPY

In coordinate cilindriche la formula è:

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\sigma^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

(di solito si considerano coordinate z e r, raro σ)

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

DEFINIZIONE DI VELOCITÀ

La VELOCITÀ è un VETTORE dipendente da SPAZIO e TEMPO:

$$\underline{v}(x, y, z, t)$$

Presa una SUPERFICIE si definisce VELOCITÀ MEDIA di PARTICELLE che ATTRAVERSANO LA SUPERFICIE la MEDIA DI TUTTE LE COMPONENTI NORMALI ALLA SUPERFICIE DELLE VELOCITÀ DELLE SINGOLE PARTICELLE:

$$v_{media} = \frac{1}{A}\int_A \underline{v}\circ\underline{n}\, dA$$

da cui si definisce il FLUSSO VOLUMETRICO in funzione della velocità media:

$$Q_{volumetrico} = A\, v_{media} = \int_A \underline{v}\circ\underline{n}\, dA \qquad \left[m^2 \cdot \frac{m}{s} = \frac{m^3}{s}\right]$$

si definisce poi il FLUSSO DI MASSA come:

$$J = \frac{m}{A\cdot t} = \frac{\rho}{A}\int_A \underline{v}\circ\underline{n}\, dA = v_{media}\cdot\rho$$

- m: quante particelle attraversano A nell'unità di tempo
- ρ: concentrazione $\frac{n^o \text{ particelle}}{\text{volume}}$

DEFINIZIONE DI ACCELERAZIONE

$\underline{v}(x, y, z, t)$ vettore $\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$

$$\circledast\ \begin{pmatrix} \frac{dv_x}{dt} \\ \frac{dv_y}{dt} \\ \frac{dv_z}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dv_x}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{dv_x}{dy}\frac{dy}{dt} + \frac{dv_x}{dz}\frac{dz}{dt} + \frac{dv_x}{dt} \\ \frac{dv_y}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{dv_y}{dy}\frac{dy}{dt} + \frac{dv_y}{dz}\frac{dz}{dt} + \frac{dv_y}{dt} \\ \frac{dv_z}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{dv_z}{dy}\frac{dy}{dt} + \frac{dv_z}{dz}\frac{dz}{dt} + \frac{dv_z}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla v_x \circ \underline{v} \\ \nabla v_y \circ \underline{v} \\ \nabla v_z \circ \underline{v} \end{pmatrix} + \frac{d\underline{v}}{dt} = \nabla\underline{v}\circ\underline{v} + \frac{d\underline{v}}{dt}$$

$$d\underline{v} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial x}dx + \frac{\partial \underline{v}}{\partial y}dy + \frac{\partial \underline{v}}{\partial z}dz + \frac{\partial \underline{v}}{\partial t}dt \quad \text{(TAYLOR IN PIÙ VARIABILI)}$$

L'ACCELERAZIONE è la VARIAZIONE DI VELOCITÀ NEL TEMPO e NELLO SPAZIO

$$\frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \underline{v}}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \underline{v}}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial x}v_x + \frac{\partial \underline{v}}{\partial y}v_y + \frac{\partial \underline{v}}{\partial z}v_z + \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} \quad \circledast$$

$\frac{\partial \underline{v}}{\partial t}$ TERMINE DI ACCELERAZIONE LOCALE DI TIPO NEWTONIANO

$$\frac{d\underline{v}}{dt} = \underbrace{\underline{v}\circ\nabla\underline{v}}_{\text{SI USA SOLO PER I FLUIDI}} + \frac{\partial \underline{v}}{\partial t}$$

NB la PARTE $\frac{\partial \underline{v}}{\partial t}$ è l'accelerazione nel tempo dovuta a variazioni di caratteristiche nell'ambiente come la pressione che provocano una variazione di velocità nella particella mentre la parte $\underline{v}\circ\nabla\underline{v}$ è dovuta all'accelerazione che la particella subisce in conseguenza al fatto che si trovi in una determinata posizione nello spazio (ex restringimento del tubo → ↑ velocità)

DERIVATA MATERIALE

$$\frac{D\psi}{Dt} = \frac{\partial \psi}{\partial t} + \underline{v}\circ\nabla\psi$$

L'ACCELERAZIONE è la DERIVATA MATERIALE DELLA VELOCITÀ