FENOMENI di TRASPORTO BIOLOGICO

- studio di processi in condizioni di QUASI EQUILIBRIO (→ semplificazioni)
- considera i sistemi v FLUIDI v SOLIDI CONTINUI (no discreti) → meccanica del continuo

TRASPORTO di { MOTO (~ fluidi)
MASSA (come diffonde il profumo in una stanza)
ENERGIA (~ trasporto di CALORE : le altre energie non vengono trasportate ma convertite in altre forme (~ en. POTENZ → en. cinetica)

TRASPORTO di MASSA

TRASPORTO PASSIVO (moto diffusivo)

(~ PROFUMO: le molecole di profumo che hanno energia intrinseca (K x T) si muovono nell'aria (secondo un moto browniano → energia per molecola)
K = cost. di BOLTZMANN (1,38 J/kelvin)
se T > → le molecole diffondono più velocemente e si diffondono in maniera CASUALE.
relazione di EINSTEIN e BROWN:
$\Delta r^2 \propto t$
(distanza percorsa proporzionale al tempo di osservazione
più tempo passa → > possibilità di spostamento

TRASPORTO FORZATO (moto forzato, convettivo v advezione)
ho una velocità di spinta $\bar{v}$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

MOTO BROWNIANO = moto disordinato delle particelle nei fluidi.

~ . ~ . ~ . ~ . ~ . ~ . ~ . ~ . ~ . ~

Il trasferimento di moto genera un FLUSSO

$1\,l = 1\,dm^3 = 10^{-3}\,m^3$

$FLUX = \frac{\Phi}{m^2 \Delta}$ (Φ = massa, energia v quantità di moto = entità trasportata; m^2 = area superficiale; Δ = tempo)

$FLOW = \frac{m^3}{s}$ ~ flusso volumetrico (~ sangue in arterie)

es: FLOW del sangue nell'aorta è 5 l/min
$= 5 \cdot 10^{-3}\,\frac{m^3}{60\,s} = 8.5 \cdot 10^{-5}\,\frac{m^3}{s}$

Il trasporto è causato dalle differenze che si creano nello spazio: i GRADIENTI
(~ variazione di concentrazione (MASSA), velocità (MOTO) o temperatura (ENERGIA) tra 2 punti)
se quantità trasportata è > → flusso >.

TRASPORTO di MOTO: dovuto a differenza di velocità V (massa x velocità)

FLUX: $\frac{M \cdot v}{m^2 \cdot s}$ GRADIENTE: $-\frac{dV}{dx}$ EQUAZ. COSTITUTIVA di NEWTON: $\tau = -\mu \frac{\partial v}{\partial x}$

TRASPORTO di MASSA: (M) dovuto a differenza di concentrazione C

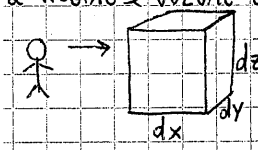
FLUX: $\frac{M}{m^2 \cdot s}$ GRADIENTE: $-\frac{dC}{dx}$ EQ. COSTIT. di FICK: $J = -D \frac{\partial C}{\partial x}$

TRASPORTO di ENERGIA: dovuto a differenza di temperatura T

FLUX: $\frac{Joule}{m^2 \cdot s}$ GRADIENTE: $-\frac{dT}{dx}$ EQ. COSTIT. di FOURIER: $Q = -K \frac{\partial T}{\partial x}$

SISTEMI di RIFERIMENTO

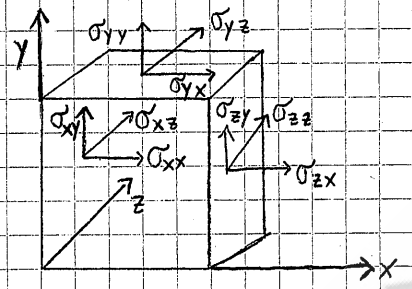
EULERIANO
osservo DA FERMO un sistema e scorre e guardo (mentre) cosa entra e cosa esce.
a REGIME e VOLUME costante

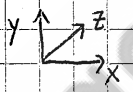


LAGRANGIANO
segue il sistema nel suo percorso, come a bordo di una molecola
computazionalmente più difficile

Uno SCALARE ha solo ampiezza
Un vettore ha ampiezza, direzione, verso.
Il TENSORE è un'entità matematica che generalizza il concetto di vettore, funzioni e prodotti scalari, indica anche il piano di riferimento.
esempio: F_{yy} (tensore di 2° grado): 1° pedice: indica la direzione ⊥ al piano di riferimento; 2° = : indica = = di F

ho un cubo in $\mathbb{R}^3$:





(tensori applicati a un cubo)

Le forze che agiscono su tt le facce del cubo sn riassumibili nella MATRICE dei TENSORI:

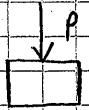
$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

↓ viene usata per gli sforzi

I tensori sulla diagonale principale $[\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}]$ sn PRESSIONI e SFORZI di TENSIONE o COMPRESSIONE.
I restanti sn SFORZI di TAGLIO.

SFORZO e PRESSIONE hanno le stesse dimensioni: $[Pa] = \frac{[N]}{[m]^2}$ (N: forza; $[m]^2$: unità di area)

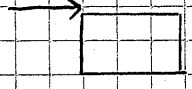
PRESSIONE: forza applicata ⊥ all'area di interesse e sempre diretta verso il piano. Può esser considerata uno scalare xkè direzione e piano sn definiti.



$$\text{SFORZO} = \frac{F}{A}$$

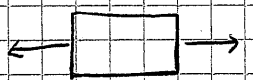
SFORZI: a seconda della direzione della forza risp. alla superficie di applicazione ho vari tipi di sforzi:

SFORZO di TAGLIO: avviene lungo una superficie: $\gamma = \frac{F_{taglio}}{A}$



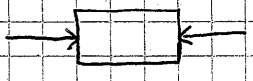
(forza applicata tangenzialmente ad una superficie del corpo)
→ DEFORMAZIONE DI SCORRIMENTO

SFORZO di TRAZIONE ⊥ alla superficie.
forza diretta verso l'esterno



(allungamento)

SFORZO di COMPRESSIONE ⊥ alla superficie.
forza diretta verso l'interno



(accorciamento)

} variazioni della lunghezza → DEFORMAZIONI

MASTER COPY
Tel. 050 8812126

GRADIENTE di uno scalare: è la sua derivata nello spazio.
rappresenta AMPIEZZA e direzione in cui la funzione ha derivata massima.

$$\nabla S = \left(\frac{\partial S}{\partial x} \; i \; \frac{\partial S}{\partial y} \; / \; \frac{\partial S}{\partial z} \right)$$ è un VETTORE

DIVERGENZA di un vettore: è la somma delle derivate nello spazio di un vettore.
è un CAMPO scalare

$$\nabla \bar{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

è una misura della quantità di qualcosa che esce (DIV +) o entra (DIV -) da un punto per unità di tempo

LAPLACIANO: ~ DIVERGENZA del gradiente. misura gnt è ≠ la funzione tra un punto e l'altro.

$$\nabla_c^2 = \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2}$$

Per un vettore il laplaciano è più complicato xké deve essere definito in ogni direzione.

prodotto scalare tra vettore e gradiente:

$$\bar{v} \cdot \Delta S = v_x \frac{\partial S}{\partial x} + v_y \frac{\partial S}{\partial y} + v_z \frac{\partial S}{\partial z}$$

Analizzo il LAPLACIANO $\boxed{\nabla^2 \Phi}$ con Φ scalare:

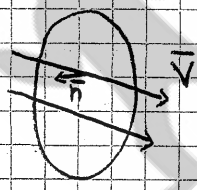
In un sist. cartesiano: $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$

In coordinate sferiche: $\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\varphi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}$ (*)

In coordinate cilindriche: $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$ $(\theta = \text{cost})$

VELOCITÀ: è un vettore che dipende da spazio e tempo.

vettori di velocità:



$$\bar{V} = \frac{s}{t}$$

Va veloc. media è l'integrale di tt le velocità:

$$V_{media} = \frac{1}{A} \int_A \bar{v} \cdot \bar{n} \, dA$$

FLUSSO VOLUMETRICO: "FLOW"

$$Q_{\text{FLUSSO VOLUMETRICO}} = V_{media} \cdot A = \frac{m}{\rho} \cdot m^2 = \frac{m^3}{\rho} = \int_A \bar{v} \cdot \bar{n} \, dA$$

FLUSSO di MASSA:

$$J = V_{media} \cdot \varphi = \frac{1}{A} \int_A \bar{v} \cdot \bar{n} \, dA \cdot \varphi = \frac{\cancel{m}}{\rho} \cdot \frac{kg}{m^{\cancel{3}2}} = \frac{M}{m^2 \cdot s}$$

ACCELERAZIONE: è la variazione di velocità sia nello spazio che nel tempo.

$$\bar{V} = \bar{V}(x, y, z, t), \quad \bar{V} = \left[i \frac{\partial x}{\partial t} + j \frac{\partial y}{\partial t} + k \frac{\partial z}{\partial t} \right]$$

[in regime EULERIANO: variaz. nel tempo
= " LAGRANGIANO: variazione nello spazio e nel tempo]

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} v_x + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} v_y + \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} v_z + \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} \quad \left(V = \frac{s}{t}\right)$$

FORMULA di NEWTON:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial t}\right) + \left(\bar{v} \cdot \nabla \bar{v}\right)$$

→ termine di accelerazione locale (nel tempo)

→ accelerazione che avviene nello spazio

· l'accelerazione è la derivata materiale della velocità.

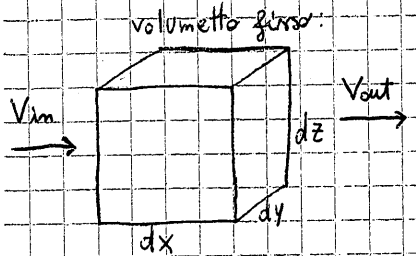
DERIVATA MATERIALE:
la funz. cambia sia nello spazio che nel tempo. collega il sistema lagrangiano con l'euleriano.

$$\frac{Dy}{Dt} = \underbrace{\frac{\partial y}{\partial t}}_{\text{tempo}} + \underbrace{\bar{v}\cdot\nabla y}_{\text{spazio}}$$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

SISTEMA STAZIONARIO: resta INVARIANTE nel tempo pur non essendo completamente fermo.
↓
è CHIUSO e CONSERVATIVO.

Invece un movimento non stazionario è caratterizzato da un'accelerazione.



Se avviene un aumento v diminuzione di massa nel tempo vuol dire che c'è un sistema chimico che produce o consuma massa (~ TRASFORMAZIONI)

equazione di conservazione di massa, di continuità:

$$\frac{\text{massa}}{\text{tempo}} = \frac{[Kg]}{[s]}$$

ma la variazione di flusso è $\frac{[Kg]}{[m]^2\cdot[s]}$ → moltiplico per $[m]^2$ per ottenere $\frac{[Kg]}{[s]}$

$$\frac{d\,Kg}{dt} = \frac{Kg}{m^2\cdot s}\cdot m^2\Big|_{in} - \frac{Kg}{m^2\cdot s}\cdot m^2\Big|_{out} = \frac{Kg}{s}\Big|_{in} - \frac{Kg}{s}\Big|_{out}$$

equaz. di conservazione di energia:

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{J}{m^2\cdot s}\, m^2\Big|_{in} - \frac{J}{m^2\cdot s}\cdot m^2\Big|_{out} = \frac{J}{s}\Big|_{in} - \frac{J}{s}\Big|_{out}$$

V_0 = cost. in regime Euleriano.

$$m = \varphi\cdot Vol. \quad (\varphi \downarrow \text{densità}) \qquad \rightarrow \frac{dm}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t}\cdot Vol. \quad \text{dove volume} = \Delta x\,\Delta y\,\Delta z$$

Esprimendo ogni equazione ~ flusso di massa: φ velocità
considerando le forze di ingresso - uscita ho: V_x = velocità di ingresso e uscita lungo X.

$$\varphi V_x\,\Delta y\,\Delta z\Big|_{in} - \varphi V_x\,\Delta y\,\Delta z\Big|_{out}$$

} bilancio che corrisponde alla variazione di massa nel tempo (=massa x velocità=)

$$\frac{dm}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t}\Delta x\,\Delta y\,\Delta z = \varphi V_x\,\Delta y\,\Delta z\Big|_{in} - \varphi V_x\,\Delta y\,\Delta z\Big|_{out}$$

$$\rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial t}\Delta x = \varphi V_x\Big|_{in} - \varphi V_x\Big|_{out} = -\Delta(\varphi V_x)$$

Nel limite di piccole variazioni le Δ diventano d, per cui:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{\partial(\varphi V_x)}{\partial x}$$

Si può estendere in 1 le dimensioni:

EQUAZ. di continuità = equaz. di conservazione di massa = $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\nabla(\varphi \cdot \bar{V})$ (operatore nabla)

in un sist. euleriano: $\varphi = cost$ (il liquido è incomprimibile)

$\rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$ (perché derivata di una costante)

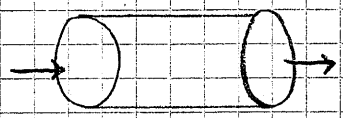
$\rightarrow -\varphi \underbrace{\nabla \bar{v}}_{\text{divergenza di } \bar{V} \text{ (velocità)}} = 0 \quad \rightarrow \nabla \cdot \bar{V} = 0$

Ciò significa che la somma delle velocità che entrano e escono in un punto devono essere uguali a 0. Ciò perché non si possono avere né sorgenti di massa, né consumi di massa dal nulla ("buchi neri")

per es: in un sistema BIDIMENSIONALE:

$\nabla \bar{v} = \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y} = 0 \quad \rightarrow \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y} = -\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x}$ (la derivata di velocità lungo x deve essere compensata dalla derivata lungo y)

es. di SIST. CHIUSO: il SIST. VASCOLARE: presenta un flusso ed è caratterizzato da un volume costante. (ciò che entra = ciò che esce a meno di condiz. patologiche (es: emorragia o accumoli)



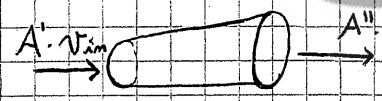
flusso di massa che entra = flusso di massa che esce

$\left.\frac{massa}{s}\right|_{in} = \left.\frac{massa}{s}\right|_{out}$

$\rightarrow \left.\frac{\varphi\, Vol}{s}\right|_{in} = \left.\frac{\varphi\, Vol}{s}\right|_{out} \quad \rightarrow \left.\frac{\varphi\, m^3}{s}\right|_{in} = \left.\frac{\varphi\, m^3}{s}\right|_{out}$ ($\varphi = cost$)

$\left.m^2 \cdot \frac{m}{s}\right|_{in} = \left.m^2 \cdot \frac{m}{s}\right|_{out} \rightarrow \left.Area \times velocità\right|_{in} = \left.A \cdot Velocità\right|_{out}$

tratto di vaso:



flusso in ingresso = flusso in uscita

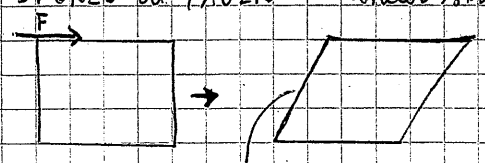
flusso di massa: $J_{in} = J_{out}$

flusso volumetrico: $Q_{in} = Q_{out}$

$V_{in} A_{in} = V_{out} A_{out}$

($A_{in} < A_{out} \rightarrow Vel_{in} > Vel_{out}$)

SFORZO di TAGLIO (= "shear stress"):



spiegamento dovuto allo sforzo di taglio