MECCANICA I

Prof Arioni

Esame: 4 compiti da Gennaio a Dicembre

23/05/17

RICHIAMI DI ALGEBRA VETTORIALE

VETTORE: strumento per la descrizione di GRANDEZZE VETTORIALI caratterizzate da: $\begin{cases} \text{modulo} = \text{intensità} \to \text{grandezza scalare} \\ \text{direzione} \\ \text{verso} \end{cases} = \text{direzione}$

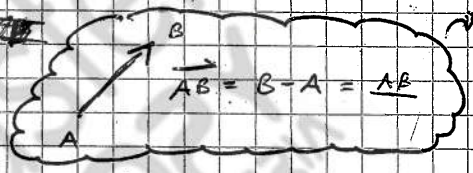
VETTORE $\nearrow$ LIBERO: non definito in un punto dello spazio

$\searrow$ APPLICATO: definito a partire da un punto di applicazione nello spazio

NOTAZIONI DI RIFERIMENTO

$\underline{v}$ $(A, \underline{v})$, $\underline{F} \to ((P)\ \underline{F})$ → punto di applicazione vettore forza

vettore generico non applicato



OSS
NOTAZIONE
$\underline{AB}$: vettore
$\overline{AB}$: distanza

$\mathbb{R}^3$: spazio lineare in cui vive un vettore di tre componenti

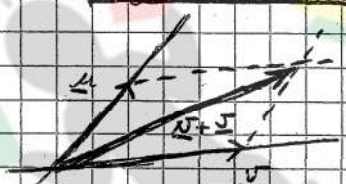
Operazioni vettoriali

Somma

$\underline{u}$, $\underline{v}$

$\underline{u} + \underline{v} = ?$

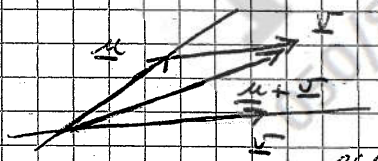
Regola parallelogramma



REGOLA

Presi nulla se due vettori liberi, sono fatti coincidere con un punto per ottenere un terzo

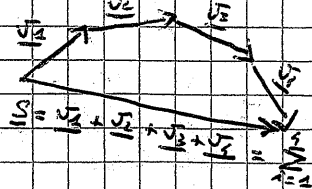
Metodo testa-coda

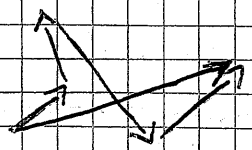


Indipendentemente dal numero di vettori sommati, il vettore risultante si ottiene disponendo un vettore che va dalla coda del primo alla punta dell'ultimo

→ è lo stesso risultato sopra

Somma di più vettori → uso la tecnica testa-coda





MASTER COPY
Tel. 050 831226
Cell. 388 9937745

OSS

Vettore somma è nullo $\Leftrightarrow$ punto partenza ≡ punto di arrivo

Differenza

$\underline{u} - \underline{v} = \underline{u} + (-\underline{v})$

Prodotto di vettore per scalare

$\underline{v} = a\,\underline{u}$ → vettore ($a \in \mathbb{R}$)

- stesso modulo ⇒ $|a\underline{u}| = |a||\underline{u}|$
- direzione = direzione ($\underline{u}$)
- verso ⇒ verso di $\underline{u}$ se $a > 0$
  - verso opposto di $\underline{u}$ se $a < 0$

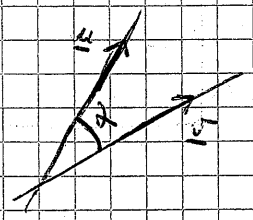
Es di prodotto vettore per scalare

$\underline{F} = m\,\underline{a}$

Prodotto scalare

È un prodotto fra (due) vettori.

$\underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}|\,|\underline{v}| \cos\alpha = \underline{v} \cdot \underline{u}$



α: angolo compreso fra le direzioni dei due vettori

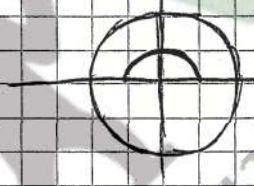
$0 \le \alpha \le 180°$

OSS

$\underline{u} \cdot \underline{v} = 0 \Leftrightarrow \underline{u} = \underline{0}$ oppure $\underline{v} = \underline{0}$ oppure $\alpha = 90°$ (cioè $\underline{u} \perp \underline{v}$)

OSS

$\cos\alpha = \dfrac{\underline{u} \cdot \underline{v}}{|\underline{u}|\,|\underline{v}|}$



Es prodotto scalare

$\underline{F} \cdot \underline{s}$ = lavoro

Spostamento

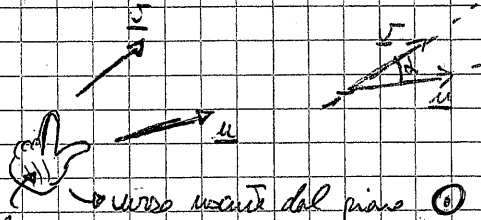
$\underline{s} = (\Delta x)\,\hat{i}$

Prodotto vettoriale

È un prodotto fra vettori.

$\underline{u} \times \underline{v} = \underline{w}$ ($\underline{w} \wedge \underline{v}$)

- modulo: $|\underline{u}|\,|\underline{v}| \sin\alpha$ ($0 \le \alpha \le \pi$)
- direzione: è ortogonale rispetto al piano definito dalle direzioni ($\underline{u}, \underline{v}$)
- verso: regola della mano destra (RHR)



→ verso uscente dal piano ⊙ risultante da $\underline{u} \times \underline{v}$

Palmo

OSS

$\underline{v} \times \underline{u} = -\underline{u} \times \underline{v}$ (ANTICOMMUTATIVITÀ) → si verifica dalla regola della mano destra

OSS

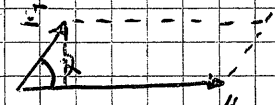
$|\underline{u}| = \underline{0}$

$\underline{w} = \underline{0} \Leftrightarrow |\underline{v}| = \underline{0}$

$\alpha = 0$ oppure π ⇒ parallelismo fra i due vettori $\underline{u} \parallel \underline{v}$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

h = altezza parallelogramma



$|\underline{w}| = |\underline{u}|\,|\underline{v}| \sin\alpha$

= area parallelogramma definito da $\underline{u}, \underline{v}$ cioè $b \cdot h = |\underline{u}|(|\underline{v}|\sin\alpha)$

Es di prodotti vettoriali:

$\underline{r} \times \underline{F}$ momento

Prodotto misto (o triplo)

$(\underline{u} \times \underline{v}) \cdot \underline{w} = a \in \mathbb{R}$ — equivalente a:

$= \underline{w} \cdot (\underline{u} \times \underline{v})$

$= (\underline{w} \times \underline{u}) \cdot \underline{v}$ (CIRCOLARITÀ)

$= (\underline{v} \times \underline{w}) \cdot \underline{u} =$

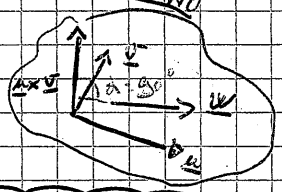
$= \underline{u} \cdot (\underline{v} \times \underline{w})$ (COMMUTATIVITÀ applicata alla CIRCOLARITÀ)

$\underline{u} \parallel \underline{v}$ T.c. $\alpha = 0° \vee 180°$

$a = 0 \Rightarrow \underline{u} = \underline{0}$

$\vee\ \underline{v} = \underline{0}$

$\underline{w} = \underline{0}$



cioè $\underline{w}$ è un vettore appartenente al piano formato da $\underline{v}$ e $\underline{u}$ cioè i tre vettori sono COMPLANARI

Doppio prodotto vettoriale

È definito tra 3 vettori

$\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) = \underline{b}(\underline{a} \cdot \underline{c}) - \underline{c}(\underline{a} \cdot \underline{b})$ IDENTITÀ DI LAGRANGE

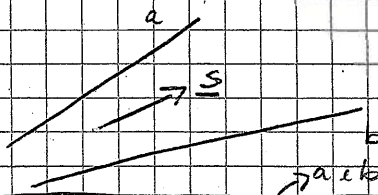
"BAC meno CAB"

doppio prodotto vettoriale che ricordo non invece commutativo ⇒ ordine importante da prendere dove invece richiesto

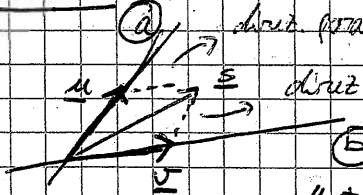
Decomposizione vettoriale

È fare scomporre un vettore lungo due direz. assegnate T.c. la somma delle componenti dia il vettore di partenza

$\underline{S}$



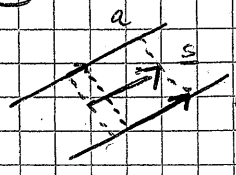
le direzioni



$\underline{u} + \underline{v} = \underline{S}$

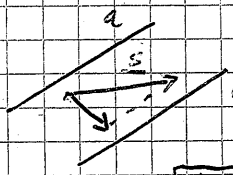
Avere definito le due direz. a, b equivale ad aver trovato una base di $\underline{S}$ che significa che la sua decomp. è unica.

OSS



⇒ infinite possibilità di decomporre $\underline{S}$ lungo le direz. a ∥ b

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

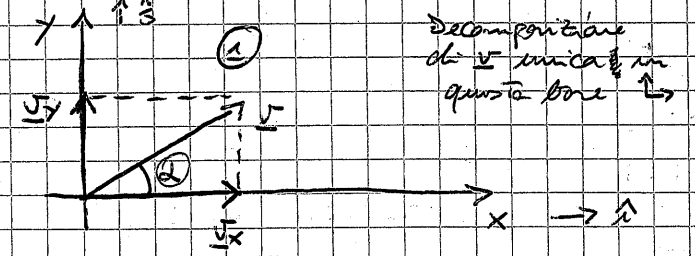


$b \not\parallel a$ CATTIVA BASE

Porto ad una nuova base → Base Cartesiana

$b \perp a$ BUONA BASE → (piano cartesiano)

COMPONENTI CARTESIANE DI UN VETTORE in 2D



Decomposizione di $\underline{v}$ unica in questa base

L'orientazione degli assi è data dai versori

$\begin{cases} \underline{v}_x \\ \underline{v}_y \end{cases}$ → vettori componenti di $\underline{v}$

$\underline{v} = \underline{v}_x + \underline{v}_y$ (Modulo di $\underline{v}$)

Le componenti cartesiane:

$|\underline{v}_x| \triangleq \underline{v} \cdot \hat{\imath} = |\underline{v}|\,|\hat{\imath}| \cos\alpha = |\underline{v}| \cos\alpha$

lunghezza proiezione di $\underline{v}$ lungo x

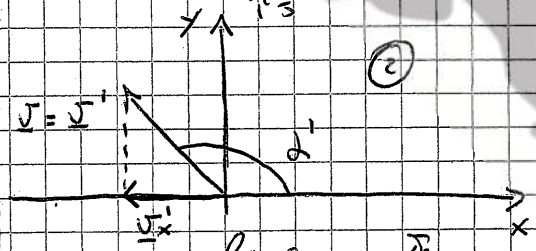
$\underline{v}_x = v_x \hat{\imath}$

modulo per versore → Come si ottiene il vettore componente sull'asse x

$\begin{cases} |\underline{v}_y| \triangleq |\underline{v}| \cos(30° - \alpha) \\ \underline{v}_y = v_y \hat{\jmath} \end{cases}$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$

OSS

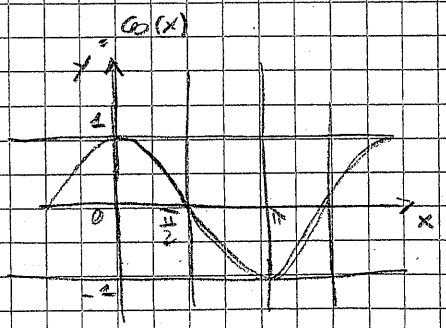


→ ha componente $v_x < 0$ poiché $\alpha > 90°$

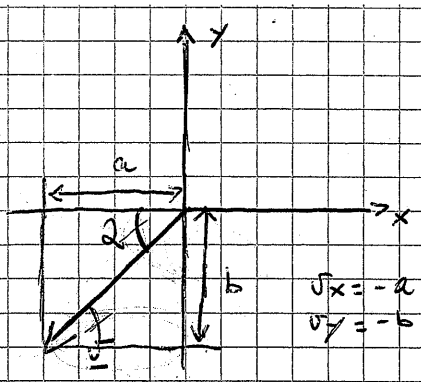
① $v_x = |\underline{v}| \cos\alpha > 0$

② $v'_x = |\underline{v}'| \cos\alpha' < 0$

↓ dipende dal verso della componente rispetto ad $\hat{\imath}$

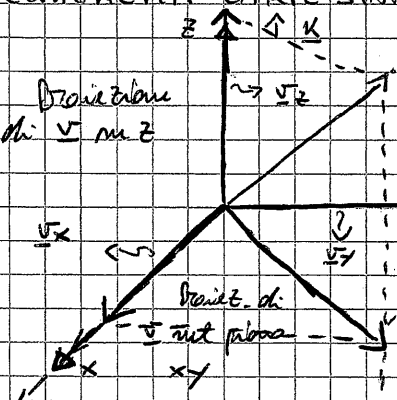


MASTER COPY
Tel. 050 831 2126
Cell. 388 9837745



Base che permette di decomporre in maniera unica un vettore 3D generico

COMPONENTI CARTESIANE DI UN VETTORE in 3D



le componenti di $\underline{v}$ sono le coordinate di P nella lin. ind. che $\underline{v}$ va applicando nell'origine!

Base: $\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$

$\underline{v} = \underline{v}_x + \underline{v}_y + \underline{v}_z$ → decomposizione unica



decompongo la proiezione che vive nel piano $\mathbb{R}^2$ sugli assi x e y

$$|\underline{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$ → Ho applicato 2 volte Teo. Pitagora

$|\underline{v}| = \sqrt{\langle \underline{v}, \underline{v} \rangle}$

Le componenti cartesiane:

$$\begin{cases} v_x \triangleq \underline{v} \cdot \hat{i} \\ v_y \triangleq \underline{v} \cdot \hat{j} \\ v_z \triangleq \underline{v} \cdot \hat{k} \end{cases} \quad \begin{matrix} > 0 \\ > 0 \\ > 0 \end{matrix}$$

nel caso in figura

$$\underline{v} = \underbrace{v_x}_{\text{vettori componenti}} + \underline{v}_y + \underline{v}_z = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}$$

$\neq$ le componenti cartesiane

Allora introducendo un sistema di riferimento mi basta che un generico vettore $\underline{v}$

$$\underline{v} \xrightarrow{SDR} \underline{v} = (v_x, v_y, v_z)$$

$$\underline{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}$$

Ma cosa succede al vett. di rif. (SDR) quando ruoto? Il modulo non cambia in due SDR diversi pur cambiando le direzioni

OPERAZIONI TRA VETTORI MEDIANTE COMPONENTI

Somma / Differenza

$$\underline{s} = \underline{u} \pm \underline{v} \xrightarrow{SDR} \begin{bmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x \pm v_x \\ u_y \pm v_y \\ u_z \pm v_z \end{bmatrix}$$

Prodotto scalare per vettore

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745