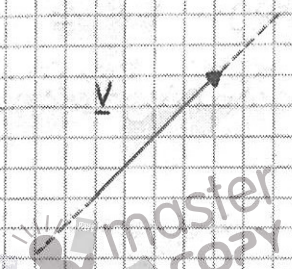
ALGEBRA VETTORIALE

Un vettore è dotato di : DIREZIONE
MODULO
VERSO, codificato dalla freccia

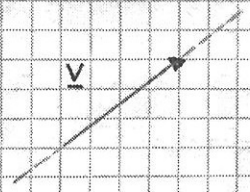


master COPY COPISTERIA

VETTORE LIBERO E VETTORE APPLICATO

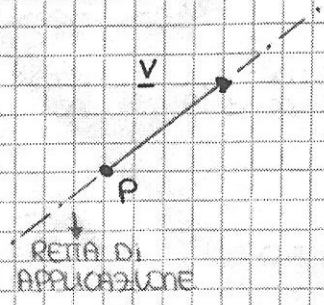
- VETTORE LIBERO

Per definire un vettore libero è sufficiente determinare
- MODULO
- DIREZIONE
- VERSO



- VETTORE APPLICATO

Per definire un vettore applicato bisogna determinare
- MODULO
- DIREZIONE
- VERSO
- PUNTO DI APPLICAZIONE

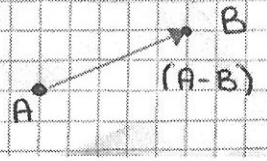


Possiamo indicare le vettore come una coppia (V, P)

Il punto di applicazione insieme alla direzione definisce in modo univoco la retta di applicazione del vettore

DIFFERENZA TRA DUE PUNTI NELLO SPAZIO

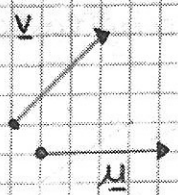
Dati due punti A e B la loro differenza (B-A) è un vettore che unisce i due punti e va verso B



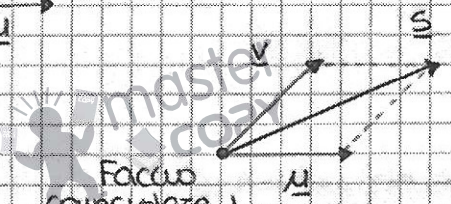
OPERAZIONI DI BASE TRA VETTORI

- SOMMA

Supponiamo di avere due vettori nel piano cioè $\underline{v}$ e $\underline{u}$



Per fare la somma bisogna usare la regola del parallelogramma.



$\underline{s} = \underline{u} + \underline{v}$

Facciamo coincidere i punti di applicazione dei vettori $\underline{v}$ e $\underline{u}$ muovendoli lungo la loro rette di applicazione fino a farli intersecare

Se i vettori con cui lavoriamo non sono vettori applicati, possiamo calcolare la somma come:



METODO PUNTA-CODA

$\underline{s} = \underline{u} + \underline{v}$

↳ FACCIAMO COINCIDERE LA PUNTA DEL PRIMO CON LA CODA DEL SECONDO

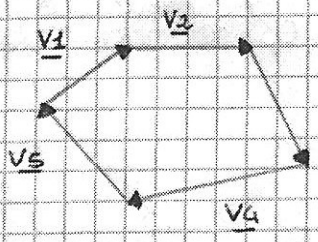
Per la differenza:

$\underline{d} = \underline{u} - \underline{v} = \underline{u} + (-\underline{v})$

↳ VETTORE $\underline{v}$ CON VERSO OPPOSTO

Anche la differenza diviene una somma modificando opportunamente il verso dei vettori

Affinché la somma di vettori in serie dia come risultato il vettore nullo è necessario che il primo e l'ultimo vettore si richiudano nello stesso punto



$\underline{S} = 0$

NOTA → Indichiamo il vettore nullo come "$\underline{0}$" zero sottosegnato per distinguerlo dallo scalare.

master COPY COPISTERIA

• PRODOTTO DI UNO SCALARE PER UN VETTORE

$c \underline{u} = \underline{v}$

(c: SCALARE, $\underline{u}$: VETTORE)

[Esempio: $m\underline{a} = \underline{F}$]

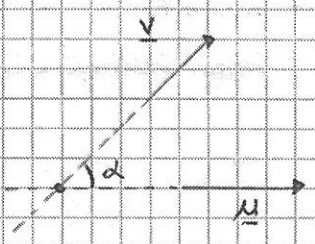
Otteniamo un vettore $\underline{v}$ con le seguenti caratteristiche:

- DIREZIONE: Stessa di $\underline{u}$
- VERSO: uguale a $\underline{u}$ se $c > 0$, opposto a $\underline{u}$ se $c < 0$
- MODULO: $\|\underline{v}\| = \|\underline{u}\| |c|$

• PRODOTTO SCALARE TRA DUE VETTORI

$\underline{u} \cdot \underline{v} = \|\underline{u}\| \|\underline{v}\| \cos\alpha \in \mathbb{R}$

(SCALARE)



α = angolo compreso tra $\underline{u}$ e $\underline{v}$

In particolare $0 \leq \alpha \leq \pi$ quindi il coseno può essere positivo o negativo

IMPORTANTE → $\alpha = \arccos\left(\frac{\underline{u} \cdot \underline{v}}{\|\underline{u}\| \|\underline{v}\|}\right)$ Molto utile per calcolare l'angolo α quando si conoscono le componenti dei vettori

Il prodotto scalare è nullo quando:

(1) $\underline{u} = \underline{0}$

(2) $\underline{v} = \underline{0}$

(3) $\cos\alpha = 0$; ovvero $\alpha = \frac{\pi}{2}$, quindi quando $\underline{u} \perp \underline{v}$

• PRODOTTO VETTORIALE TRA DUE VETTORI

$\underline{u} \times \underline{v} = \underline{w}$

Otteniamo un vettore $\underline{w}$ con le seguenti caratteristiche:

- MODULO: $\|\underline{w}\| = \|\underline{u}\| \|\underline{v}\| \sin\alpha$
- DIREZIONE: $\underline{w} \perp \underline{u}$ e $\underline{w} \perp \underline{v}$ Il vettore $\underline{w}$ è ortogonale ad entrambi i vettori
- VERSO: Regola della mano destra, ovvero Pollice lungo $\underline{u}$, Indice lungo $\underline{v}$, Medio a dà $\underline{w}$

Il prodotto vettoriale è ANTICOMMUTATIVO:

$$\underline{u} \times \underline{v} = -\underline{v} \times \underline{u}$$

Il prodotto vettoriale è nullo quando:

(1) $\underline{u} = \underline{0}$

(2) $\underline{v} = \underline{0}$

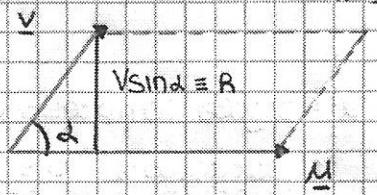
(3) $\sin\alpha = 0$, ovvero $\alpha = 0$, quindi $\underline{u} \parallel \underline{v}$

INTERPRETAZIONE GEOMETRICA DEL MODULO DEL PRODOTTO VETTORIALE

$$\|\underline{w}\| = \|\underline{u}\| \underbrace{\|\underline{v}\| \sin\alpha}_{R}$$

$$= \|\underline{u}\| R$$

= AREA PARALLELOGRAMMA



- PRODOTTO MISTO

$$(\underline{u} \times \underline{v}) \cdot \underline{w} = a \in \mathbb{R}$$

Per far sì che il prodotto sia nullo, escludendo i casi banali $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w} = \underline{0}$ è necessario che i 3 vettori siano COMPLANARI

PROPRIETÀ PRODOTTO MISTO

(1) Commutatività prodotto scalare: $(\underline{u} \times \underline{v}) \cdot \underline{w} = \underline{w} \cdot (\underline{u} \times \underline{v})$

(2) Proprietà di circolarità: Possiamo girare i vettori senza alterare il risultato

$$(\underline{w} \times \underline{u}) \cdot \underline{v} = (\underline{v} \times \underline{w}) \cdot \underline{u} = \dots$$

- DOPPIO PRODOTTO VETTORIALE

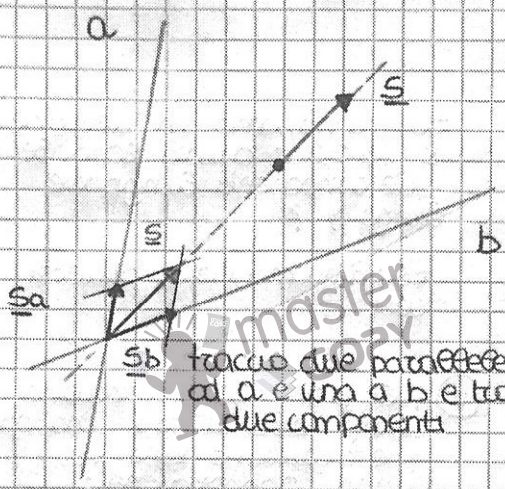
$$\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) = \underline{b}(\underline{a} \cdot \underline{c}) - \underline{c}(\underline{a} \cdot \underline{b})$$

[REGOLA BAC minus CAB]

↓ IDENTITÀ DI LAGRANGE

↘ Il risultato è ovviamente un vettore

DECOMPOSIZIONE VETTORIALE



Assegnato un vettore $\underline{S}$ nel piano e due direzioni a e b bisogna scomporre $\underline{S}$ nei suoi due vettori costituenti

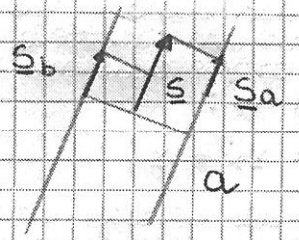
Immaginiamo che $\underline{S}$ sia un vettore applicato e quindi che sia necessario spostare $\underline{S}$ nel punto di incontro delle due direzioni

Traccio due parallele, una ad a e una a b e trovo le due componenti

Analogamente sappiamo che $\underline{S}_a + \underline{S}_b = \underline{S}$

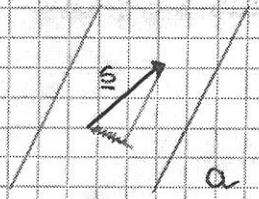
La decomposizione nel piano è unica a meno che non ci siano casi patologici, ovvero:

(1)



Considerando $\underline{S}$ libero, in quanto se fosse applicato non potrei farne nulla. Per scomporre $\underline{S}$ ci sono infiniti casi, basta variare le lunghezze di a e b, o meglio di $\underline{S}_a$ e $\underline{S}_b$

(2)



In questo caso abbiamo una pessima BASE e questo perché ci manca un riferimento per riportare la componente segnata di $\underline{S}$

Analogamente non conviene utilizzare 2 direzioni parallele tra loro per rappresentare un vettore e le sue componenti, analogamente la scelta più comoda è quella di utilizzare 2 direzioni $\perp$ la cosiddetta → BASE ORTOGONALE