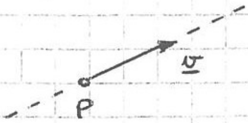
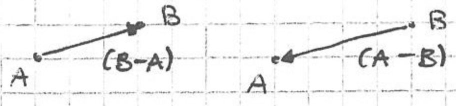
ALGEBRA VETTORIALE

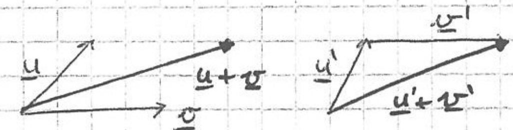


modulo $\|\underline{v}\|$
direzione
verso
punto di applicazione

(RDA).

L'insieme tra p.to di applicazione e direzione definiscono la retta di applicazione.





- SOMMA – regola del parallelogramma
  – testa-coda dei vettori
  che si può estendere a n vettori e che ha come risultato $\underline{0}$ (vettore nullo) se la testa dell'ultimo chiude un poligono sulla coda del primo.

- PRODOTTO DI SCALARE PER UN VETTORE
  $\underline{v} = c\,\underline{u}$ dove $c \in \mathbb{R}$
  - modulo di $\underline{v} = |c| \cdot \|\underline{u}\|$
  - direzione di $\underline{v}$ = direz. di $\underline{u}$
  - verso di $\underline{v}$

es: $\underline{F} = m\underline{a}$

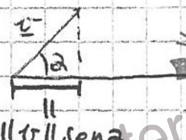
- PRODOTTO SCALARE
  $a = \underline{u} \cdot \underline{v}$ con $a \in \mathbb{R}$
  $a = \|\underline{u}\| \cdot \|\underline{v}\| \cos\alpha$ dove α è l'angolo compreso tra i due vettori $0 \le \alpha \le 180°$

commutativo, associativo

$a = 0 \iff \underline{u} = \underline{0} \lor \underline{v} = \underline{0} \lor \cos\alpha = 0$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{a}{\|\underline{u}\| \cdot \|\underline{v}\|}\right)$$

- PRODOTTO VETTORIALE
  $\underline{w} = \underline{u} \times \underline{v}$
  - modulo di $\underline{w} = \|\underline{u}\| \cdot \|\underline{v}\| \cdot \operatorname{sen}\alpha$
  - direzione $\perp \underline{u}, \underline{v}$ } RHR
  - verso } right hand



! è anticommutativo: $\underline{u} \times \underline{v} = -(\underline{v} \times \underline{u})$

$\underline{w} = \underline{0} \iff \underline{u} = \underline{0} \lor \underline{v} = \underline{0} \lor \alpha = 0° \lor \alpha = 180°$

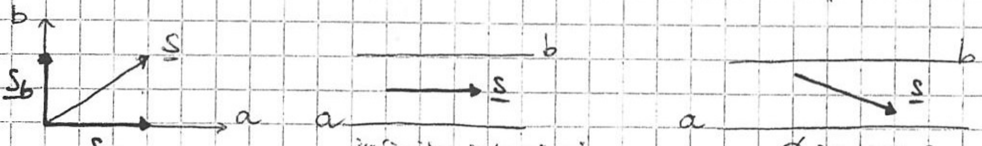
- PRODOTTO MISTO
  $\underline{u} \times \underline{v} \cdot \vec{\underline{w}} = a \in \mathbb{R}$

  $a = 0 \iff$ i tre vettori sono complanari

circolarità: $\underline{w} \times \underline{u} \cdot \underline{v} = \underline{v} \times \underline{w} \cdot \underline{u}$

- DOPPIO PRODOTTO VETTORIALE
  $\underline{a} \times \underline{b} \times \underline{c} = \underline{b}\,(\underline{a} \cdot \underline{c}) - \underline{c}\,(\underline{a} \cdot \underline{b})$ BAC minus CAB

DECOMPOSIZIONE VETTORIALE = ricerca dei vettori componenti



infinite soluzioni

∅ soluzioni

COMPONENTI CARTESIANE di un vettore sul piano

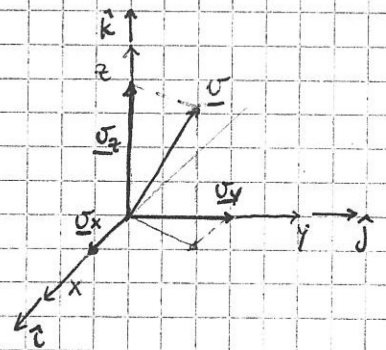
① $\underline{v} \cdot \underline{i} = \|\underline{v}\| \underbrace{\|\underline{i}\|}_{1} \cos\alpha \overset{def.}{=} v_x$ componente cartesiana

$\underline{v_x} = v_x \cdot \underline{i}$

② $\underline{v}' \cdot \underline{i} = \|\underline{v}'\| \cos(\alpha') = v_x'$

$\underline{v_y} = v_y \cdot \underline{j}$

COMPONENTI CARTESIANE di un vettore nello spazio



$\underline{v} = \underline{v_x} + \underline{v_y} + \underline{v_z}$

cioè $\underline{v} = v_x \underline{i} + v_y \underline{j} + v_z \underline{k}$

Per qualunque sistema di assi che scelgo, il modulo non cambia

$\|\underline{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$

- SOMMA $\underline{s} = \underline{u} + \underline{v} \underset{SDR}{=} \begin{bmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x + v_x \\ u_y + v_y \\ u_z + v_z \end{bmatrix}$

- PRODOTTO PER SCALARE $\underline{v} = c \cdot \underline{u} \underset{SDR}{=} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix}$

- PRODOTTO SCALARE $a = \underline{u} \cdot \underline{v} \longrightarrow a = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$

$\|\underline{v}\| = \sqrt{\underline{v} \cdot \underline{v}}$

- PRODOTTO VETTORIALE

$\underline{w} = \underline{u} \times \underline{v} \longrightarrow \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{bmatrix}$ calcolo il det

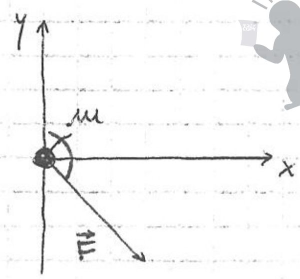
$\Rightarrow \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_y v_z - u_z v_y \\ u_z v_x - u_x v_z \\ u_x v_y - u_y v_x \end{bmatrix}$

• PRODOTTO MISTO: $\underline{u} \cdot (\underline{v} \times \underline{w}) = \begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{bmatrix}$

$$\hat{v} = \text{vers}(\underline{v}) = \frac{\underline{v}}{\|\underline{v}\|} = \frac{1}{\|\underline{v}\|} \cdot \underline{v}$$

$$\left\{\begin{aligned} \hat{v}_x &= \underline{v} \cdot \underline{i} = \cos(\alpha_x) \\ \hat{v}_y &= \underline{v} \cdot \hat{\underline{j}} = \cos(\alpha_y) \\ \hat{v}_z &= \underline{v} \cdot \hat{\underline{k}} = \cos(\alpha_z) \end{aligned}\right] \text{ COSENI DIRETTORI} \quad \text{t.c.} \quad 1 = \cos^2(\alpha_x) + \cos^2(\alpha_y) + \cos^2(\alpha_z)$$

esercizio:



$\|\underline{F}\| = 100 \text{ N}$
$m = 10 \text{ kg}$
$a = ?$

$$\underline{F} = m\underline{a} \Rightarrow \underline{a} = \frac{1}{m} \cdot \underline{F}$$

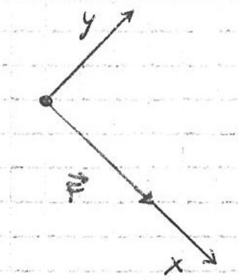
$$\underline{F} = \begin{cases} F_x = \|\underline{F}\| \cos(45) = \|\underline{F}\| \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ F_y = \|\underline{F}\| \cos(45+90) = \|\underline{F}\| \cos(135°) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \|\underline{F}\| \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{F} = \begin{cases} F_x = 50\sqrt{2} \text{ N} \\ F_y = -50\sqrt{2} \text{ N} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} F_x \\ \frac{1}{m} F_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5\sqrt{2} \\ -5\sqrt{2} \end{bmatrix} \text{ m/s}^2$$

$$\|\underline{a}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{50 + 50} = 10 \text{ m/s}^2$$

Oss: se avessi scelto un altro sistema di riferimento:

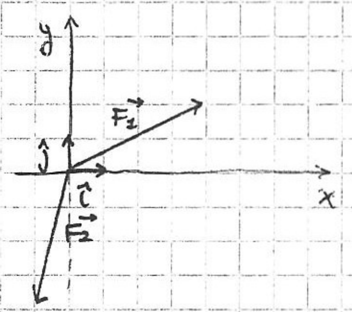


$$\underline{F}' = \begin{bmatrix} F'_x \\ F'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \|\underline{F}\| \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \end{bmatrix} \text{N}$$

$$\underline{a}' = \begin{bmatrix} 10 \text{ m/s}^2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Il modulo di a non sarebbe cambiato.

Ulteriori esempi – calcolo vettoriale: 07/10



$\|\vec{F_1}\| = 20N$

$\|\vec{F_2}\| = 10\,N$

vogliamo calcolare la risultante $\vec{R} = \vec{R_1} + \vec{R_2}$

$$F_1 = \begin{bmatrix} \|F_1\| \cos 30° \\ \|F_1\| \operatorname{sen} 30° \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10\sqrt{3} \\ 10 \end{bmatrix} N$$

$F_{1,y}$

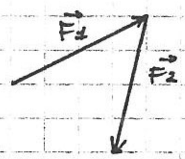
i vettori componenti hanno verso opposto a quello dei due versori

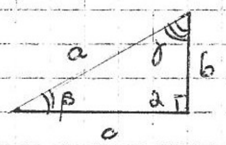
$$F_2 = \begin{bmatrix} -\|F_2\| \operatorname{sen} 30° \\ -\|F_2\| \cos 30° \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -5\sqrt{3} \end{bmatrix} N$$

$$\Rightarrow R = \begin{bmatrix} R_x \\ R_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{1x} + F_{2x} \\ F_{1y} + F_{2y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10\sqrt{3} - 5 \\ 10 - 5\sqrt{3} \end{bmatrix} N \simeq \begin{bmatrix} 12{,}32\ N \\ 1{,}34\ N \end{bmatrix}$$

$$\|\vec{R}\| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(10\sqrt{3}-5)^2 + (10-5\sqrt{3})^2} \simeq 12{,}39\ N$$

Oss = per il principio di trasmissibilità io posso far scivolare la forza $\vec{F_1}$ sulla sua retta d'azione senza rompere gli equilibri. Mi serve per applicare il metodo punta-coda e calcolare il modulo di $\vec{R}$ senza passare per le componenti.

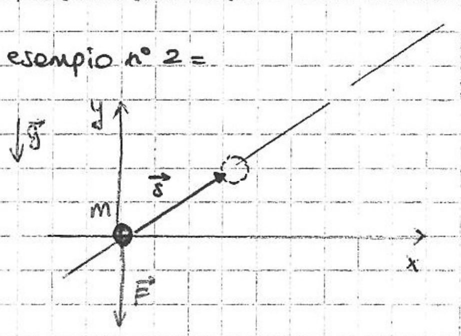




- TH. DI CARNOT = $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$
- TH. DEL SENO = $\dfrac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \dfrac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \dfrac{c}{\operatorname{sen}\gamma}$

Nel nostro caso = $\|\vec{R}\|^2 = \|\vec{F_1}\|^2 + \|\vec{F_2}\|^2 - \cancel{2}\|F_1\|\|F_2\| \dfrac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} = 12.39\ N$

esempio n° 2 =



$\|\vec{F}\| = 50\ N$

$\|\vec{s}\| = 0.5\ m$

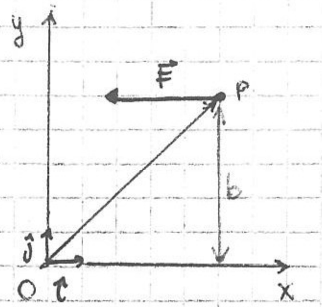
$$\mathcal{L} = \vec{F} \cdot \vec{s} = \|\vec{F}\| \cdot \|\vec{s}\| \cos(45° + 90°) = (50 \cdot 0{,}5)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) N \cdot m \simeq -17.68\ J$$

Il fatto che il lavoro sia negativo significa che la $\vec{F}$ è forza resistente (si oppone al moto), non motrice.

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ -50\,N \end{bmatrix} \quad e \quad \vec{s} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/4\ m \\ \sqrt{2}/4\ m \end{bmatrix}$$

$\vec{F}\cdot\vec{s} = F_x s_x + F_y s_y = -17,68\ J$.

esempio n° 3:



$\overline{OP} = 15\ m$

$\|\vec{F}\| = 10\ N$

Calcolare il momento della forza $\vec{F}$ rispetto al polo O, cioè $\vec{M_O} = \vec{OP} \times \vec{F}$

• in termini di componenti

$$\vec{OP} = \begin{bmatrix} \overline{OP}\sqrt{2}/2 \\ \overline{OP}\sqrt{2}/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 15\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} m$$

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} \|\vec{F}\| \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10\ N \\ 0 \end{bmatrix}$$

• prodotto vettoriale:

$$\vec{M_O} = \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ OP_x & OP_y & 0 \\ F_x & F_y & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{15\sqrt{2}}{2} & \frac{15\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -10 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \hat{k}\left(\frac{150\sqrt{2}}{2}\right) = (75\ N\cdot m)\,\hat{k}\sqrt{2}$$

l'unica componente non nulla è quella lungo k

oppure, più velocemente: $\|\vec{M_O}\| = \|\vec{OP}\|\cdot\|\vec{F}\|\,\text{sen}\,\gamma = 10\cdot 15\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 75\sqrt{2}\ N\cdot m$

con γ = supplementare di 45° = 135°

che è stato anche $\|\vec{M_O}\| = \|\vec{F}\|\cdot\underbrace{\|\vec{OB}\|\,\text{sen}(45°)}_{b\ =\ \text{braccio}} = \|\vec{F}\|\cdot b$