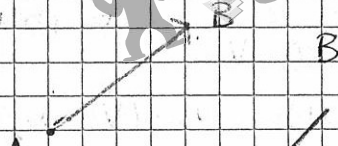
MECCANICA I

- ALGEBRA DI VETTORI

SCALARE ≠ VETTORE
- SCALARE: ↓ numero con unità di misura
- VETTORE: ↓ direzione, verso, punto di appl.
  - → VETTORI APPLICATI
  - → VETTORI LIBERI (non hanno punto di applicazione)

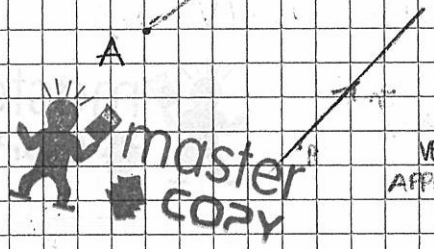
La differenza fra due punti nello spazio è un VETTORE



$B - A = \overrightarrow{AB}$

modulo → magnitude

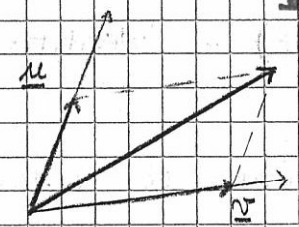
DIREZIONE, VERSO } direction



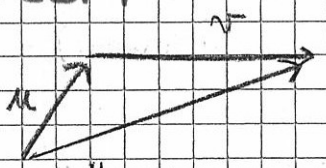
SOMMA

$\underline{S} = \underline{u} + \underline{v}$

è commutativa



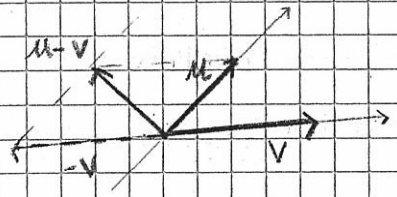
"REGOLA DEL PARALLELOGRAMMA"



"SOMMA TESTA CODA DEI VETTORI"

DIFFERENZA

$u - v = u + (-v)$



PRODOTTO TRA SCALARE E VETTORE

$v = a u$ con $a \in \mathbb{R}$ NOTO, u NOTO

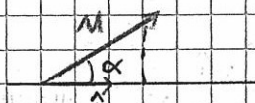
MODULO = $|a| \|u\|$
DIREZIONE = direzione u
VERSO = se $a > 0$ v e u sono concordi!
se $a < 0$, v e u sono discordi.

PRODOTTO SCALARE (dot product)

$u \cdot v = c \rightarrow$ il risultato è un numero reale $c \in \mathbb{R}$

$c = \|u\| \cdot \|v\| \cos\alpha$

con α = angolo minore compreso fra i due vettori



AL PRODOTTO SCALARE È ASSOCIATO ANCHE IL CONCETTO DI PROIEZIONE SULL'ASSE DEL VERSORE $\hat{i}$

- COMMUTATIVA
- NULLO SE $\|u\| = 0$, $\|v\| = 0$ o $\theta = \pi/2$

PRODOTTO VETTORIALE (CROSS PRODUCT)

$\underline{u} \times \underline{v} = \underline{w}$ — È ANTICOMMUTATIVO

MODULO: $\|u\| \cdot \|v\| \sin\alpha$ ⟶ $\alpha = 0$ VETTORI PARALLELI

DIREZIONE: ortogonale a u e a V

VERSO: regola mano destra

PRODOTTO MISTO

$(\underline{u} \times \underline{v}) \cdot \underline{w} = a \in \mathbb{R}$ (scalare)

- COMMUTATIVO IL PRODOTTO SCALARE, NON IL VETTORIALE
- CIRCOLARITÀ → metto w al posto di u, v al posto di w e u al posto di V...

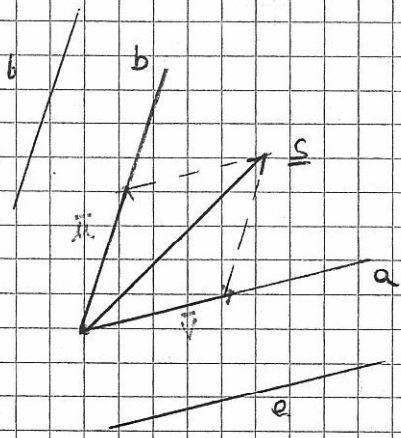
$= w \cdot (u \times v) = v \cdot (w \times u) = u \cdot (v \times w)$

DOPPIO PRODOTTO VETTORIALE (TRIPLE PRODUCT)

$\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c})$ è un vettore

$b(a \cdot c) - c(a \cdot b)$ identità di Lagrange

Decomposizione Vettoriale lungo le direzioni a e b

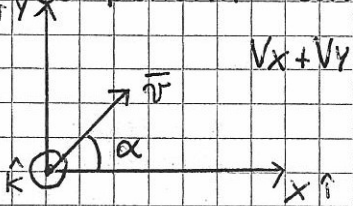


- Le faccio passare dal punto di "APPLICAZIONE" di S
- Scompongo S alle sue direzioni

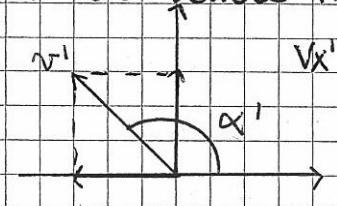
OSS. A e B non sono parallele

u e v sono vettori

Componenti Cartesiane di un vettore nel piano



$V_x + V_y = V$



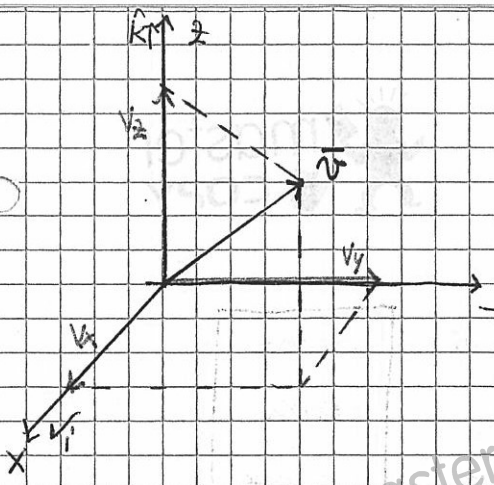
$V_x' + V_y' = V'$

α = angolo che vettore forma con versore u

MODULO $V_x = v \cdot i = \|v\| \cos\alpha \, \|i\| = \|v\| \cos\alpha$

Se $\alpha < 90°$ è POSITIVO, ALTRIMENTI È NEGATIVO

$\underline{v_x} = V_x \cdot i$ → se fosse discorde con $\hat{i}$, il segno è contenuto nel valore V_x



IN 3D

1) DECOMPORRE IL VETTORE

$\underline{V_x} + \underline{V_y} + \underline{V_z} = \underline{V}$

$$\begin{cases} V_x = \underline{V} \cdot \hat{i} \rightarrow V_x = V_x \hat{i} \\ V_y = V \cdot \hat{j} \rightarrow V_y = V_y \hat{j} \\ V_z = V \cdot K \rightarrow V_z = V_z \hat{K} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{v} = \underline{v_x} + \underline{v_y} + \underline{v_z} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{K}$$

(Le componenti cadono a secondo del piano di riferimento in cui sono)

→ COME TROVO IL MODULO ? $\quad \underline{\|v\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}$

- SOMMA -

$$\underline{S} = \underline{u} + \underline{V} \longrightarrow \begin{bmatrix} Sx \\ Sy \\ Sz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix}$$

- SCALARE PER VETTORE -

$$\underline{S} = a\underline{u} \longrightarrow \begin{bmatrix} Sx \\ Sy \\ Sz \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix}$$

- PRODOTTO SCALARE -

$$\underline{u} \cdot \underline{V} \qquad (u_x \hat{i} + u_y \hat{j} + u_z \hat{k})(V_x \hat{i} + V_y \hat{j} + V_z \hat{k})$$
$$= u_x V_x + u_y V_y + u_z V_z$$

- PRODOTTO VETTORIALE -

$$\underline{w} = \underline{u} \times \underline{V} \qquad \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} = \hat{i}(u_y V_z - u_z V_y) + \hat{j}(u_x V_z - V_x u_z) + \hat{k}(u_x V_y - V_x u_y)$$

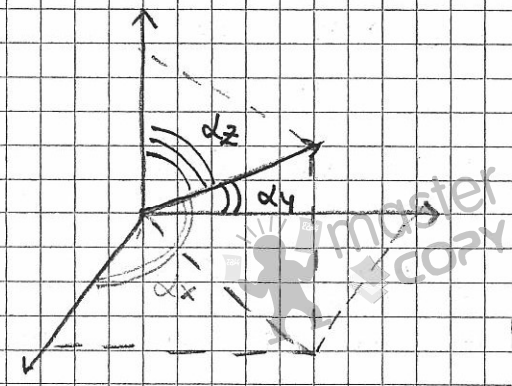
- PRODOTTO MISTO -

$$\underline{u} \cdot (\underline{v} \times \underline{w}) \longrightarrow \det \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ V_x & V_y & V_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}$$ ottengo uno scalare

- DOPPIO PRODOTTO VETTORIALE -

$\underline{u} \times (\underline{v} \times \underline{w})$

Componenti di un versore

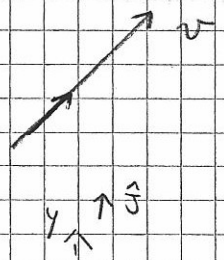


$$\lambda x = \lambda \cdot i = \boxed{\cos\alpha_x}$$
$$\lambda y = \lambda j = \boxed{\cos\alpha_y}$$
$$\lambda z = \lambda k = \boxed{\cos\alpha_z}$$

coseni direttori

$$\|\lambda\| = 1 = \sqrt{\cos^2\alpha_x + \cos^2\alpha_y + \cos^2\alpha_z}$$

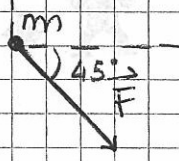
Come ottenere un versore associato a un vettore?



$$\text{Versore}(\underline{v}) = \hat{\underline{v}} = \frac{\underline{v}}{\|\underline{v}\|} = \frac{1}{\|\underline{v}\|}\underline{v}$$
$$= \left(\frac{v_x}{\|v\|}; \frac{v_y}{\|v\|}; \frac{v_z}{\|v\|}\right)$$

ESERCITAZIONE 03/10/19

1)



$\underline{F} = m\underline{a}$

$\vec{F} = m\vec{a}$

$\|\vec{F}\| = 100\ N$

$m = 10\ kg$

$\vec{a} = ?$

$$\vec{a} = \frac{1}{m}\vec{F}$$ vettore per scalare

In un piano una eq. vettoriale equivale a 2 eq scalari

$\underline{a}$ { Direzione → stessa $\underline{F}$
Modulo → $\frac{1}{m}\|\underline{F}\| = \frac{100\ N}{10\ kg} = 10\ m/s^2$
Verso → verso di F perché m è positivo

Det componenti cartesiane di $\vec{a}$?

$a_x = ?$

$a_y = ?$

Componenti di F $\quad F_x = \underline{F} \cdot \underline{i} = \|F\|\cos 45 = 50\sqrt{2}\ N$

$F_y = \underline{F} \cdot \underline{j} = \|F\|\sin 45 = 50\sqrt{2}\ N$

$\|\cos(135°)$

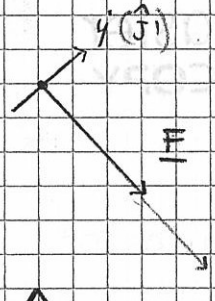
estrazione componenti vettore $[\underline{F}] = \begin{cases} F_x = 50\sqrt{2}\ N \\ F_y = -50\sqrt{2}\ N \end{cases}$

$$[\underline{a}] = (a_x; a_y) = \left(\frac{50\sqrt{2}}{10}; -\frac{50\sqrt{2}}{10}\right) = (5\sqrt{2}; -5\sqrt{2})$$

$\frac{F_x}{m}$ $\frac{F_y}{m}$

$$\|\underline{a}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{25\cdot 2 + 25\cdot 2} = \sqrt{100} = 10\ m/s^2$$

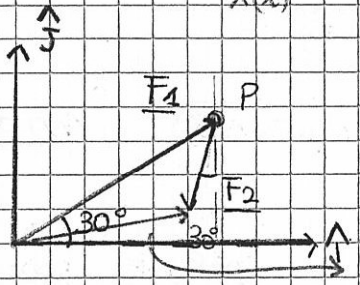
Modulo vettore $\underline{F}$ non cambia mai ma le componenti sì perché cambiano a seconda del sistema di riferimento



$$[\underline{F}]' = \begin{cases} F_x' = \|\underline{F}\| = 100\ N \\ F_y' = 0 \end{cases}$$

$$[\underline{a}]' = (a_x', a_y') = \left(\frac{\|F\|}{m}, 0\right) = (10; 0)\ m/s^2$$

2)



$\|\underline{F_1}\| = 20\ N$, $\|\underline{F_2}\| = 10\ N$, $\underline{R}$?

$\underline{R} = \underline{F_1} + \underline{F_2}$

$$[\underline{F_1}] = (F_{1x}; F_{1y}) = (\|\underline{F_1}\|\cos(30°); \|\underline{F_1}\|\cos(60)°) = \left(20\frac{\sqrt{3}}{2}; 20\frac{1}{2}\right) = (10\sqrt{3}, 10)\ N$$

$$[\underline{F_2}] = (F_{2x}; F_{2y}) = (-\|\underline{F_2}\|\operatorname{sen} 30°; \|\underline{F_2}\|\cos 30°) = \left(-10\frac{1}{2}; -10\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = (-5; -5\sqrt{3})\ N$$

$$[\underline{R}] = [\underline{F_1}] + [\underline{F_2}] = (F_{1x} + F_{2x}; F_{1y} + F_{2y}) = (10\sqrt{3} - 5; 10 - 5\sqrt{3}) = (12.32; 1.34)\ N$$

$$\|\underline{R}\| = \sqrt{(12,32)^2 + (1,34)^2} = 12.39\ N$$