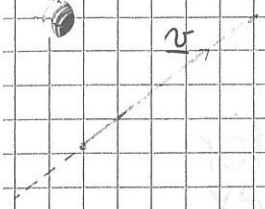
FONDAMENTI DI MECCANICA PER LA BIOINGEGNERIA 01/10/2020

Prof. Alessio Antoni — Federica Mastrocola

Algebra vettoriale — 02/10/2020

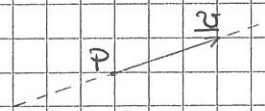


Ogni vettore ha direzione, verso, intensità (o modulo).

Queste quantità sono sufficienti a identificare un vettore libero.

Per descrivere un vettore applicato è necessario aggiungere il punto di applicazione, che automaticamente ne definisce la retta di applicazione.

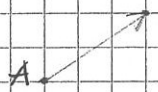
Le forze sono vettori applicati e possono essere spostate lungo la retta di applicazione.



$(\underline{v}, P)$

Un esempio di vettore libero è la velocità angolare di un corpo rigido, che non è infatti applicata in un punto.

La differenza di punti nello spazio euclideo è un vettore.

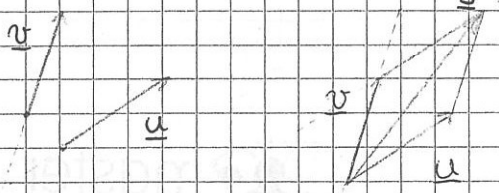


$B - A$

Un versore è un vettore di modulo unitario.

Operazioni sui vettori:

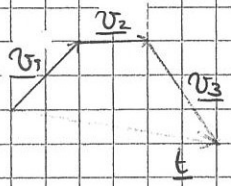
SOMMA



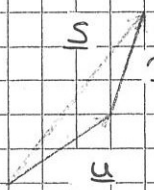
$\underline{S} = \underline{u} + \underline{v}$ ottenuto con la regola del parallelogramma

$\bar{u}$ e $\bar{v}$ sono in questo caso vettori applicati.

Con $\bar{u}$ e $\bar{v}$ vettori liberi, possiamo traslarli in modo da porre il punto di applicazione del secondo sulla fine del primo.



$\underline{t} = \underline{v_1} + \underline{v_2} + \underline{v_3}$



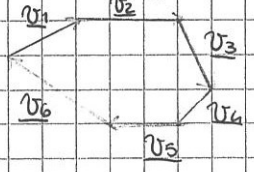
Somma testa coda.

$\underline{S} = \underline{u} + \underline{v}$

La differenza funziona analogamente alla somma:

$\underline{d} = \underline{u} + \underline{v} = \underline{u} + (-\underline{v})$

Affinché la somma sia un vettore nullo è sufficiente che la "catena" di vettori abbia stesso punto iniziale e finale.



$\underline{v_1} + \underline{v_2} + \underline{v_3} + \underline{v_4} + \underline{v_5} + \underline{v_6} = \underline{0}$

↓

vettore nullo

PRODOTTO DI UNO SCALARE PER UN VETTORE

$c\,\underline{u} = \underline{v} \qquad c \in \mathbb{R}$

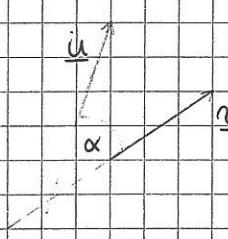
La direzione di $\underline{v}$ coincide con la direzione di $\underline{u}$.

Il verso di $\underline{v}$ è:
- uguale a quello di $\underline{u}$ se c è positivo;
- opposto a quello di $\underline{v}$ se c è negativo.

Il modulo di $\underline{v}$ (Notazione: $\|\underline{v}\|$ o $|\underline{v}|$ una preferibilmente il primo) vale
$\|\underline{v}\| = |c| \|\underline{u}\|$

Es. $m \cdot \underline{a} = \underline{F}$

PRODOTTO SCALARE TRA DUE VETTORI (tale operazione è applicabile solo ai vettori)
$\underline{u} \cdot \underline{v} = \|\underline{u}\| \|\underline{v}\| \cos\alpha \quad \in \mathbb{R}$



$0 \le \alpha \le \pi$

$\alpha = \arccos\left(\frac{\underline{u} \cdot \underline{v}}{\|\underline{u}\| \|\underline{v}\|}\right)$

Un prodotto scalare è nullo se:
- $\underline{u} = \underline{0}$
- $\underline{v} = \underline{0}$
- $\underline{u} \perp \underline{v}$

Es: $\mathcal{L} = \underline{F} \cdot \underline{\Delta}$

PRODOTTO VETTORIALE TRA DUE VETTORI (applicabile comunque solo ai vettori)
$\underline{u} \times \underline{v} = \underline{w}$ (Notazione: simbolo $\times$ o $\wedge$)

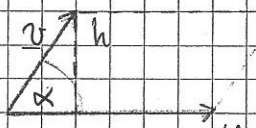
- modulo: $\|\underline{w}\| = \|\underline{u}\| \|\underline{v}\| \sin\alpha$
- direzione: $\underline{w} \perp \underline{u}$, $\underline{w} \perp \underline{v}$
- verso: regola della mano destra con pollice lungo $\underline{u}$, indice lungo $\underline{v}$, il medio indicherà il verso di $\underline{w}$. RHR (right hand rule)

Seguendo la figura sopra $\underline{u} \times \underline{v}$ ha verso entrante nel foglio. Invece $\underline{v} \times \underline{u}$ ha verso uscente.

$\underline{u} \times \underline{v} = -\underline{v} \times \underline{u}$ anticommutatività

Un prodotto vettoriale è nullo se:
- $\underline{u} = \underline{0}$
- $\underline{v} = \underline{0}$
- $\underline{u} \parallel \underline{v}$

Interpretazione geometrica del modulo
$\|\underline{u}\| \underbrace{\|\underline{v}\| \sin\alpha}_{h}$ = area del parallelogramma



Es: Momento di una forza rispetto a un polo

PRODOTTO MISTO (o TRIPLO)
$(\underline{u} \times \underline{v}) \cdot \underline{w} = a \in \mathbb{R}$

Per annullarsi, il prodotto misto (oltre alle condizioni elencate per prodotto scalare o vettoriale) deve avere tutti e 3 i vettori complanari

Se non si annulla, geometricamente indica il volume del parallelepipedo avente per lati i tre vettori.

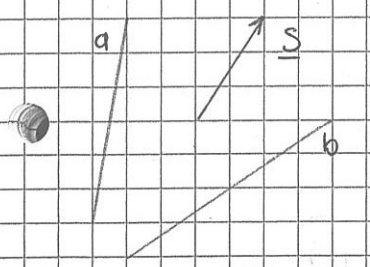
$\underline{w} \cdot (\underline{u} \times \underline{v}) = (\underline{u} \times \underline{v}) \cdot \underline{w}$ commutatività del prodotto scalare

Proprietà di circolarità $(\underline{u} \times \underline{v}) \cdot \underline{w} = (\underline{w} \times \underline{u}) \cdot \underline{v} = (\underline{v} \times \underline{w}) \cdot \underline{u}$
Consiste nel far "scorrere" i vettori nell'espressione.

DOPPIO PRODOTTO VETTORIALE
$\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) = \underline{b}(\underline{a} \cdot \underline{c}) - \underline{c}(\underline{a} \cdot \underline{b})$ regola BAC minus CAB

per l'identità di Lagrange

Decomposizione vettoriale

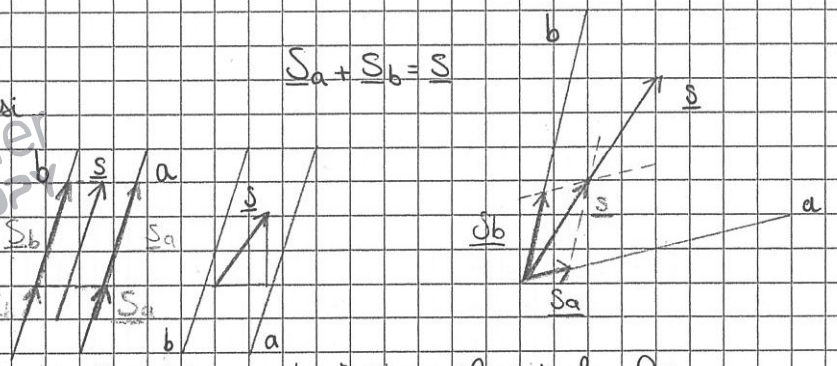


a e b sono due direzioni.

Dobbiamo scomporre il vettore moto $\underline{S}$ lungo a e b, ossia proiettare $\underline{S}$ lungo le direzioni a e b in maniera tale che la somma dei due vettori così identificati su a e b restituisca $\underline{S}$.

È "l'inversa" della somma vettoriale.

$$\underline{S}_a + \underline{S}_b = \underline{S}$$



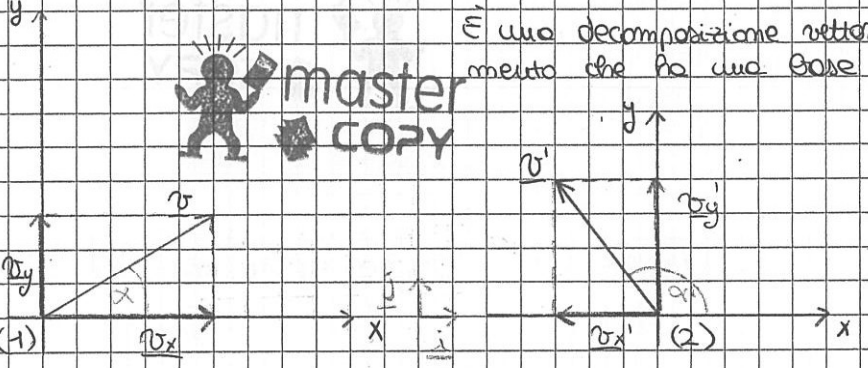
Sul piano, questa decomposizione è unica, fatta eccezione per due casi particolari:

- a, b, $\underline{S}$ sono tutti paralleli fra loro;
- a, b sono parallele, $\underline{S}$ non è parallelo ad a e b.

Solitamente, il modo più conveniente di porre a e b è ortogonalmente fra loro.

Componenti cartesiane di un vettore nel piano

È una decomposizione vettoriale in un sistema di riferimento che ha una base ortogonale.



$\underline{v} = \underline{v_x} + \underline{v_y}$ — i vettori componenti — $\underline{v'} = \underline{v_x'} + \underline{v_y'}$

$\underline{v} \cdot \underline{i} = \|\underline{v}\| \, \|\underline{i}\| \cos\alpha \triangleq v_x > 0$

$\underline{v'} \cdot \underline{i} = \|\underline{v}\| \, \|\underline{i}\| \cos\alpha' \triangleq v_x' < 0$

$\underline{v_x} = v_x \underline{i}$

$\underline{v_y} = v_y \underline{j}$ — le componenti cartesiane (scalari)

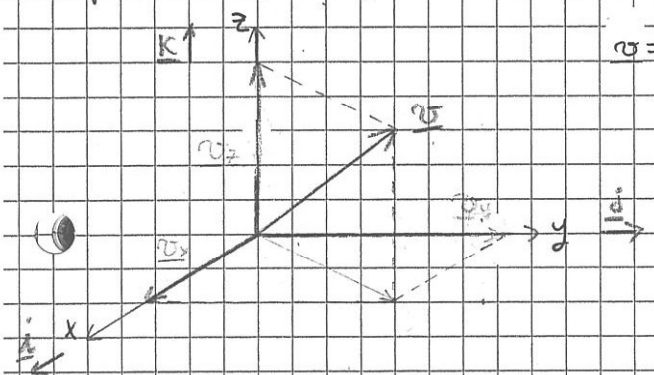
$\underline{v_x'} = v_x' \underline{i}$

$\underline{v_y'} = v_y' \underline{j}$

$\underline{v} = v_x \underline{i} + v_y \underline{j}$

$\underline{v'} = v_x' \underline{i} + v_y' \underline{j}$

Componente cartesiane di un vettore (in generale - nello spazio tridimensionale)



$\underline{v} = \underline{v_x} + \underline{v_y} + \underline{v_z}$ composizione unica

$v_x = \underline{v} \cdot \underline{i} \longrightarrow \underline{v_x} = v_x \underline{i}$

$v_y = \underline{v} \cdot \underline{j} \longrightarrow \underline{v_y} = v_y \underline{j}$

$v_z = \underline{v} \cdot \underline{k} \longrightarrow \underline{v_z} = v_z \underline{k}$

terna levogira o destrorsa

$$\underline{v} = v_x \underline{i} + v_y \underline{j} + v_z \underline{k}$$

Le componenti cartesiane dipendono dal sistema di riferimento. Lo stesso non si può dire per il modulo.

Se $\underline{v}$ è il vettore posizione OP, le sue componenti sono (x_P, y_P, z_P).

Per calcolare il modulo di $\underline{v}$ a partire dalle sue componenti cartesiane:

$$\|\underline{v}\|^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$$

$$\|\underline{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Operazioni tra vettori in termini di componenti cartesiane

SOMMA

$$\underline{s} = \underline{u} + \underline{v} \xrightarrow{\text{Sistema di Riferimento}} \begin{bmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}$$

PRODOTTO SCALARE PER VETTORE

$$\underline{s} = c \cdot \underline{u} \xrightarrow{SDR} \begin{bmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\,u_x \\ c\,u_y \\ c\,u_z \end{bmatrix}$$

PRODOTTO SCALARE

$$a = \underline{u} \cdot \underline{v} \xrightarrow{SDR} a = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$$

$$a = \underline{u}^T \underline{v} \xrightarrow{SDR} a = \begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}$$

$$\|\underline{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\underline{v} \cdot \underline{v}}$$

PRODOTTO VETTORIALE

$$\underline{s} = \underline{u} \times \underline{v} \xrightarrow{SDR} \begin{bmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \underline{i}(u_y v_z - u_z v_y) + \underline{j}(u_z v_x - u_x v_z) + \underline{k}(u_x v_y - u_y v_x)$$

PRODOTTO MISTO

$$a = \underline{u} \cdot (\underline{v} \times \underline{\omega}) \xrightarrow{SDR} a = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{vmatrix}$$

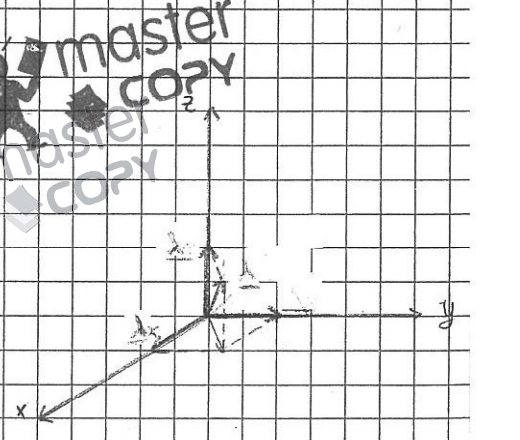
Componenti cartesiane di un versore

Sono dette COSENI DIRETTORI.

$\underline{\lambda}$ è un versore, quindi $\|\underline{\lambda}\| = 1$

$$\left.\begin{aligned} \lambda_x &= \underline{\lambda} \cdot \underline{i} = \cos(\alpha_x \text{ tra } \underline{\lambda} \text{ e } \underline{i}) \\ \lambda_y &= \underline{\lambda} \cdot \underline{j} = \cos(\alpha_y \text{ tra } \underline{\lambda} \text{ e } \underline{j}) \\ \lambda_z &= \underline{\lambda} \cdot \underline{k} = \cos(\alpha_z \text{ tra } \underline{\lambda} \text{ e } \underline{k}) \end{aligned}\right\} \text{COSENI DIRETTORI che identificano univocamente un versore}$$

Angoli misurati rispettivamente sul piano passante per $\underline{\lambda}$ e per $\underline{i}$ o $\underline{j}$ o $\underline{k}$.



$$\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2 = 1$$

$$(\cos\alpha_x)^2 + (\cos\alpha_y)^2 + (\cos\alpha_z)^2 = 1$$

Se in questo relazione conosciamo $\cos\alpha_x$ e $\cos\alpha_y$ e vogliamo trovare $\cos\alpha_z$:

$\cos\alpha_z = \pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha_x - \cos^2\alpha_y}$

↳ quindi non è univocamente definito

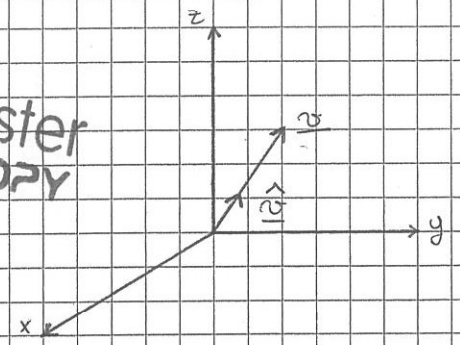
Versore associato ad un vettore

$\|\underline{v}\| > 1$

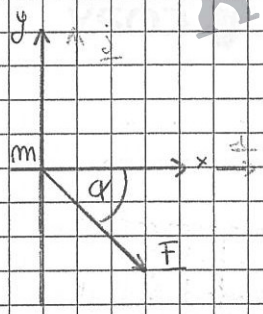
$\hat{\underline{v}}$ è il versore associato a $\underline{v}$

$$\hat{\underline{v}} = \frac{\underline{v}}{\|\underline{v}\|} \xrightarrow{SDR} \left(\frac{v_x}{\|\underline{v}\|}, \frac{v_y}{\|\underline{v}\|}, \frac{v_z}{\|\underline{v}\|}\right)$$

$$= \frac{1}{\|\underline{v}\|}\,\underline{v} = \text{scalare per vettore}$$



Esercizio:



$m = 10\ kg$

$\|\underline{F}\| = 100\ N$

$\alpha = 45°$

$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix} = ?$

$\underline{F} = m\underline{a} \longrightarrow \underline{a} = \frac{\underline{F}}{m}$

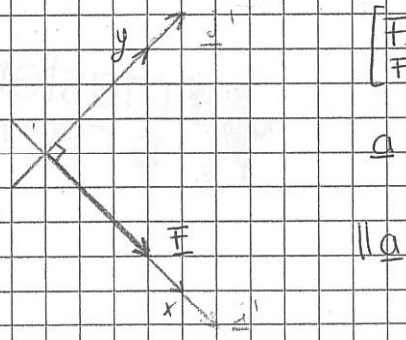
$\|\underline{a}\| = \frac{\|\underline{F}\|}{m} = 10\ \frac{m}{s^2}$

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{F}\cdot\underline{i} \\ \underline{F}\cdot\underline{j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \|\underline{F}\|\cos(45°) \\ \|\underline{F}\|\cdot\cos(135°) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \|\underline{F}\|\sqrt{2}/2 \\ -\|\underline{F}\|\sqrt{2}/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50\sqrt{2}\ N \\ -50\sqrt{2}\ N \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_x/m \\ F_y/m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5\sqrt{2}\ m/s^2 \\ -5\sqrt{2}\ m/s^2 \end{bmatrix}$$ variabile in base al SDR

$\|\underline{a}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{50+50} = \sqrt{100} = 10\ \frac{m}{s^2}$ invariante

Posso a cambiare SDR.

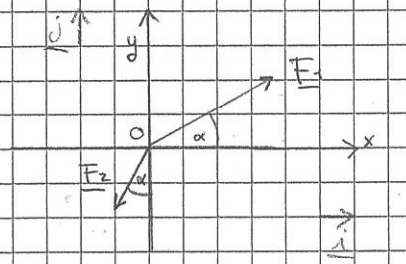


$$\begin{bmatrix} F_x' \\ F_y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \|\underline{F}\| \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100\ N \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_x' \\ a_y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_x'/m \\ F_y'/m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10\ m/s^2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\|\underline{a}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{100+0} = 10\ \frac{m}{s^2}$

Esercizio



$\|\underline{F_1}\| = 20\ N$

$\|\underline{F_2}\| = 10\ N$

$\alpha = 30°$

$\underline{R} = \underline{F_1} + \underline{F_2} = \begin{bmatrix} R_x \\ R_y \end{bmatrix} = ?$