ALGEBRA VETTORIALE

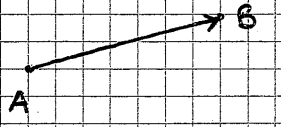
1) VETTORE

È uno strumento matematico utilizzato per rappresentare grandezze vettoriali, caratterizzate da: - MODULO (magnitude)
- DIREZIONE } direzionali
- VERSO

↓ Es: Forze, Velocità

- Vettore libero ⇒ $\vec{v}$
- Vettore applicato ⇒ $(A, \vec{v})$ con A = PUNTO di APPLICAZIONE (Point application)

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745



$\vec{AB} = B - A$ → Vettore

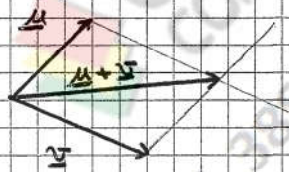
AB → Scalare (Lunghezza)

Quante una grandezza scalare (temperatura, pressione) può rappresentata da un unico valore.

2) SOMMA VETTORIALE

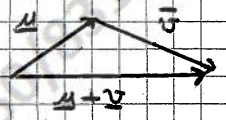
$\underline{u}$, $\underline{v}$ vettori

$\underline{u} + \underline{v} = ?$



= Regola del parallelogramma

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745



= Somma "testa-coda"

Applicabile per più vettori contemporaneamente

3) DIFFERENZA VETTORIALE

$\underline{u} - \underline{v} = \underline{u} + (-\underline{v})$, dove $-\underline{v}$ è uguale a $\underline{v}$ ma di VERSO OPPOSTO.

4) PRODOTTO VETTORE PER SCALARE

$\underline{v} = a\,\underline{u} \qquad (a \in \mathbb{R})$

Il risultato è un vettore:
- modulo ⇒ $\|\underline{v}\| = |a| \cdot \|\underline{u}\|$
- direzione = stessa di $\underline{u}$
- verso = stesso di $\underline{u}$ se $a > 0$
  opposto a $\underline{u}$ se $a < 0$

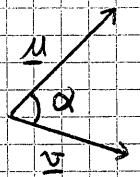
(Es: $\underline{F} = m \cdot \underline{a}$)

5) PRODOTTO SCALARE (fra due vettori) (Es: $\mathcal{L} = \underline{F} \cdot \underline{S}$)

$\underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \cos\alpha$ (α l'angolo più piccolo compreso fra i due vettori) $\Rightarrow 0 \leq \alpha \leq 180°$

$\cos\alpha = \dfrac{\underline{u} \cdot \underline{v}}{|\underline{u}| \cdot |\underline{v}|}$ (UNIVOCO)

$\underline{u} \cdot \underline{v} = \underline{v} \cdot \underline{u} \Rightarrow$ proprietà commutativa



$\underline{u} \cdot \underline{v} = 0 \rightarrow$
1) $\underline{u} = \underline{0}$, $\underline{v} = \underline{0}$ (vettore nullo)
2) Se $\alpha = 90°$, quindi $\underline{u} \perp \underline{v}$

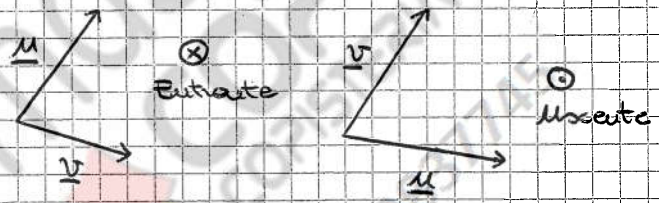
6) PRODOTTO VETTORIALE (fra due vettori)

$\underline{u} \times \underline{v} = \underline{w}$ $(\underline{u} \wedge \underline{v})$ → il risultato è un vettore:

- modulo: $|\underline{w}| = |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \text{sen}\,\alpha$
- direzione: $\perp$ al piano in cui giacciono $\underline{u}, \underline{v}$
- verso: regola della mano destra

Non vale la proprietà commutativa:

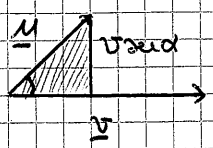
- pollice nel primo vettore,
- dita nel secondo,
- polmo indica la direzione del risultato.



$\underline{u} \times \underline{v} = -(\underline{u} \times \underline{v}) \Rightarrow$ ANTICOMMUTATIVO

$\underline{w} = \underline{0} \rightarrow$
1) $\underline{u} = \underline{0}$, $\underline{v} = \underline{0}$
2) $\alpha = 0°$, $\alpha = 180°$, quindi $\underline{u} \parallel \underline{v}$

- Interpretazione del modulo di $\underline{w}$



$|\underline{w}| = |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \,\text{sen}\,\alpha$

è uguale all'area del parallelogramma.

7) PRODOTTO MISTO (o TRIPLO)

$$(\underline{u} \times \underline{v}) \cdot \underline{w} = a \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{Scalare}$$

(Vettore) (Scalare)

Equivalenze:

- $\underline{w} \cdot (\underline{u} \wedge \underline{v})$ } Proprietà commutativa
- $(\underline{w} \times \underline{u}) \cdot \underline{v}$ } Proprietà ciclica
- $(\underline{v} \times \underline{w}) \cdot \underline{u}$
- $(\underline{u} \times \underline{v}) \cdot \underline{w}$

MASTER COPY
Tel. 050 831 2126
Cell. 388 9837745

$a = 0 \rightarrow$
- $\underline{u} \parallel \underline{v}$
- $\underline{u} = \underline{0}, \underline{v} = 0, \underline{w} = 0$
- $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ giacciono sullo stesso piano (= complanari)

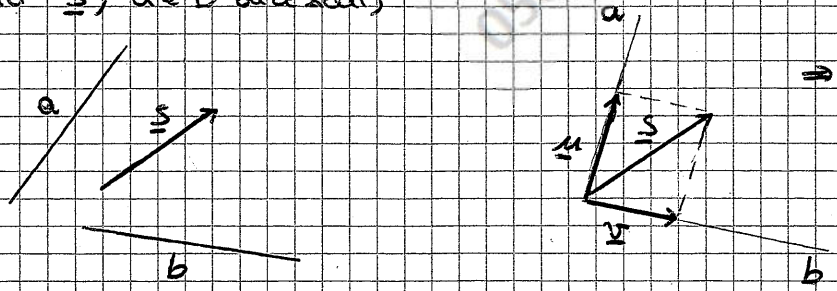
8) DOPPIO PRODOTTO VETTORIALE (fra 3 vettori)

$$\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) = \underline{b}(\underline{a} \cdot \underline{c}) - \underline{c}(\underline{a} \cdot \underline{b})$$ ("BAC meno CAB")

DECOMPOSIZIONE VETTORIALE

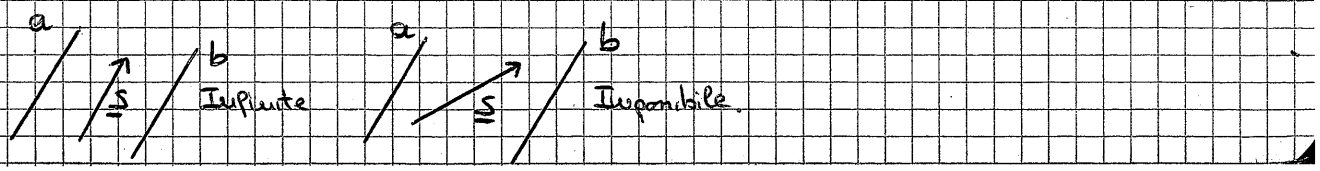
È un'operazione che consiste nel scomporre un vettore in due direzioni date tali che si ottengano due vettori la cui somma è uguale al vettore di partenza:

Dati $\underline{s}$, a e b direzioni,

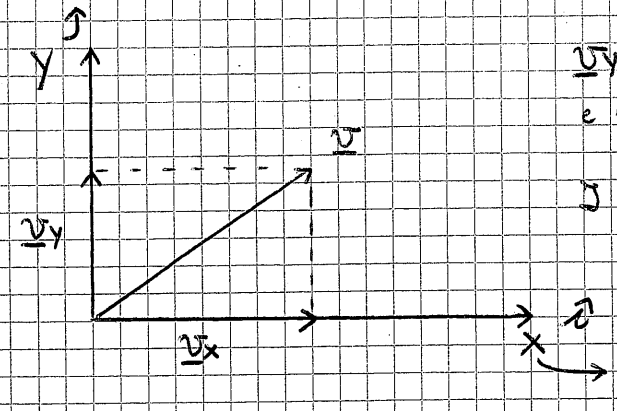


⇒ Unica rappresentazione.

- Se $a \parallel b \parallel \underline{s}$ ⇒ infinite ponibilità di decomposizione
- Se $a \parallel b$, ma $\underline{s}$ non è $\parallel$ ad essi ⇒ non ci sono ponibilità (Imponibile)



COMPONENTI



$\underline{v}_y$, $\underline{v}_x$ sono vettori componenti
e la loro somma è uguale a $\underline{v}$

I VERSORI sono vettori con modulo unitario.

Asse orientato
quando è associato ad un VERSORE

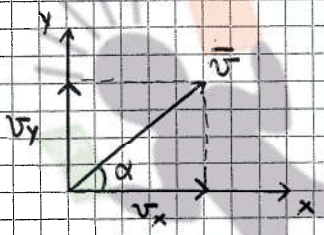
Le componenti cartesiane si ottengono proiettando $\underline{v}$ rispetto ai due assi x ed y ⇒ "proiettare" = operazione di prodotto scalare.

$$v_x \triangleq \underline{v} \cdot \underline{i} = |\underline{v}||\underline{i}| \cos\alpha = |\underline{v}| \cos\alpha$$

$$v_y \triangleq \underline{v} \cdot \underline{j} = |\underline{v}| \cdot \cos(90° - \alpha)$$

Le componenti cartesiane hanno valore positivo se i vettori componenti sono concordi con i versori.

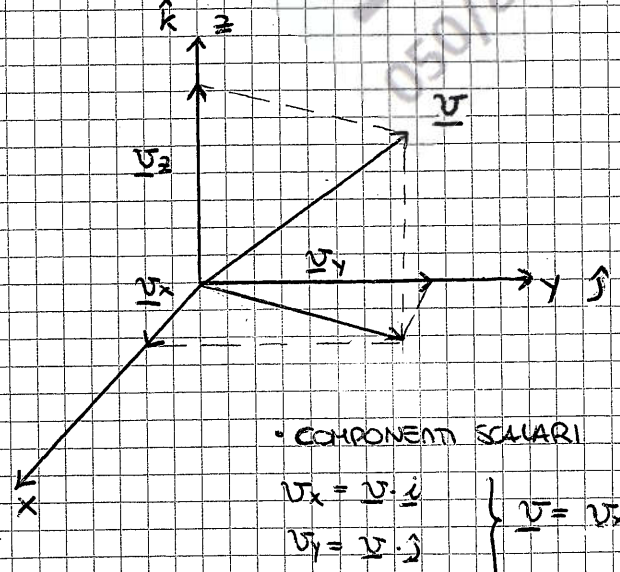
Operativamente:



$v_x = |\underline{v}| \cdot \cos\alpha$

$v_y = |\underline{v}| \cdot \sin\alpha$

- In $\mathbb{R}^3$



- VETTORI COMPONENTI

1) Si proietta $\underline{v}$ su un asse e sul piano in cui giacciono gli altri due.
2) Proietto il vettore componente rispetto agli altri due assi.
= Decomposizione unica

$$\underline{v}_z + \underline{v}_x + \underline{v}_y = \underline{v}$$

- COMPONENTI SCALARI

$$\left.\begin{aligned} v_x &= \underline{v} \cdot \underline{i} \\ v_y &= \underline{v} \cdot \underline{j} \\ v_z &= \underline{v} \cdot \underline{k} \end{aligned}\right\} \quad \underline{v} = v_x \cdot \hat{\imath} + v_y \cdot \hat{\jmath} + v_z \cdot \hat{k}$$

$\underline{v} \rightarrow \underline{v} = (v_x, v_y, v_z)$

Le componenti scalari variano a seconda del sistema di riferimento, ma il modulo è invariante:

$$|\underline{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

• Operazioni fra vettori mediante componenti

1) Somma e differenza

$$\underline{S} = \underline{u} \pm \underline{v} \rightarrow \begin{cases} S_x = u_x \pm v_x \\ S_y = u_y \pm v_y \\ S_z = u_z \pm v_z \end{cases}$$

2) Prodotto scalare per vettore

$$\underline{S} = a \cdot \underline{u} \rightarrow \begin{cases} S_x = a\,u_x \\ S_y = a\,u_y \\ S_z = a\,u_z \end{cases}$$

3) Prodotto scalare

$$S = \underline{u} \cdot \underline{v}$$
$$= (u_x \underline{i} + u_y \cdot \underline{j} + u_z \cdot \underline{k}) \cdot (v_x \underline{i} + v_y \cdot \underline{j} + v_z \cdot \underline{k}) \rightarrow \begin{pmatrix} \underline{i} \cdot \underline{i} = 1 \\ \underline{i} \cdot \underline{j} / \underline{k} = 0 \end{pmatrix}$$
$$= u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$$

4) Prodotto vettoriale

$$\underline{S} = \underline{u} \times \underline{v}$$

Calcolo il Det(M) $\rightarrow$ $M = \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{pmatrix}$

$$\text{Det}(M) = (u_y v_z - v_y u_z) \cdot \hat{i} + (u_z \cdot v_x - u_x \cdot v_z)\,\hat{j} + (u_x \cdot v_y - v_x \cdot u_y) \cdot \hat{k}$$

5) Prodotto misto

$$\underline{S} = \underline{u} \cdot (\underline{v} \times \underline{w})$$

Calcolo il Det(M) $\rightarrow$ $M = \begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{pmatrix}$ $\rightarrow$ Ordinati

$$\text{Det}(M) = u_x v_y w_z + u_y v_z w_x + u_z v_x w_y - (w_z v_x u_y + w_y v_z u_x + w_x v_y u_z)$$

Ministat Corsi 3881993745 3201931126