lezione 01/10/2021

ALGEBRA VETTORIALE



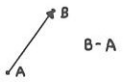
- modulo/intensità $\|\underline{v}\|$
- verso
- direzione
- punto applicazione

} RETTA DI APPLICAZIONE (RDA)

es: velocità, forza, velocità angolare...

2 TIPI DI VETTORI:

- VETTORI LIBERI $\underline{v}$ => es: velocità angolare di un corpo rigido
- VETTORI APPLICATI $(\underline{v}, P)$ => es: forza



OPERAZIONI VETTORIALI

SOMMA



traslo $\underline{u}$ nell'origine comune (si può sempre traslare vettore applicato lungo la retta di applicazione)

traslo $\underline{v}$ " " "

somma => regola <u>parallelogramma</u>

} danno stesso risultato

Se vettori sono liberi => somma <u>testa - coda</u>



questa somma si può estendere a n vettori



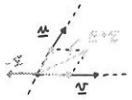
testa - coda ha risultato vettore nullo ($\underline{0}$) se testa ultimo chiude coda primo

DIFFERENZA

caso particolare somma

$\underline{u} - \underline{v} = \underline{u} + (-\underline{v})$

$-\underline{v}$ vettore opposto = stesso modulo e direzione ma verso opposto



master COPY COPISTERIA

master COPY

master COPY COPISTERIA

master COPY

LINKAGE SIMULATOR

PRODOTTO DI SCALARE PER VETTORE

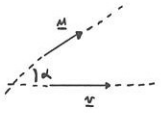
$\underline{v} = c\,\underline{w}$, dove $c \in \mathbb{R}$

- modulo di $\underline{v}$: $\|\underline{v}\| = |c| \cdot \|\underline{w}\|$
- direzione $\underline{v} \equiv$ direzione $\underline{w}$
- verso di $\underline{v}$ — $\equiv$ verso $\underline{w}$ se $c > 0$
  — opposto verso $\underline{w}$ se $c < 0$

PRODOTTO SCALARE

$a = \underline{w} \cdot \underline{v} \quad \in \mathbb{R}$

$a = \|\underline{w}\| \, \|\underline{v}\| \cos\alpha$



$0 \le \alpha \le 180°$ $\qquad \alpha = \arccos\left(\frac{a}{\|\underline{w}\| \, \|\underline{v}\|}\right)$

prodotto scalare è commutativo $\underline{w} \cdot \underline{v} = \underline{v} \cdot \underline{w}$

$a \overset{?}{=} 0$ (casi nullità)

$\left.\begin{array}{l} \underline{w} = 0 \\ \underline{v} = 0 \end{array}\right\}$ casi banali

$\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \underline{w} \perp \underline{v}$

Concetto prodotto scalare legato a concetto proiezione asse

PRODOTTO VETTORIALE

$\underline{w} = \underline{u} \times \underline{v} \quad (\underline{w} \wedge \underline{v})$

- modulo $\|\underline{w}\| = \underbrace{\|\underline{w}\| \, \|\underline{v}\| \, \text{sen}\,\alpha}_{\text{sempre} \ge 0} \qquad 0 \le \alpha \le 180°$
- direzione $\perp \underline{w}, \underline{v}$
- verso: regola mano dx (RHR)

$\left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\}$ RHR

prodotto vettoriale è anticommutativa: $\underline{w} \times \underline{v} = -\underline{v} \times \underline{w}$

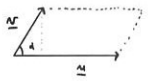
$\underline{w} \overset{?}{=} 0$ (casi nullità)

$\underline{w} = 0$

$\underline{v} = 0$

$\underline{w}, \underline{v}$ paralleli ($\alpha = 0$ o $\alpha = 180°$)

interpretazione geometrica



$\|\underline{w}\| \|\underline{v}\| \sin\alpha$ = area parallelogramma

PRODOTTO MISTO

$(\underline{u} \times \underline{v}) \cdot \underline{w} = a \in \mathbb{R}$ combinazione prod. vettoriale e scalare

- commutativo per prodotto scalare: $(\underline{u} \times \underline{v}) \cdot \underline{w} = \underline{w} \cdot (\underline{u} \times \underline{v})$
- $a \stackrel{?}{=} 0$

  casi banali

  se tre vettori sono complanari ($\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ complanari)

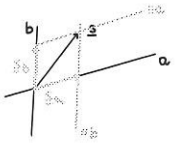
- interpretazione geometrica: volume
- proprietà di CIRCOLARITÀ: $(\underline{u} \times \underline{v}) \cdot \underline{w} = (\underline{w} \times \underline{u}) \cdot \underline{v} = (\underline{v} \times \underline{w}) \cdot \underline{u}$

Doppio prodotto vettoriale

$\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) = \underline{b}(\underline{a} \cdot \underline{c}) - \underline{c}(\underline{a} \cdot \underline{b})$ (IDENTITÀ DI LAGRANGE)

BAC minus CAB

DECOMPOSIZIONE VETTORIALE



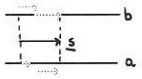
Dato un vettore, scomporre il vettore nel piano lungo le due direzioni assegnate (base)

=

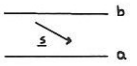
DETERMINARE VETTORI COMPONENTI che sommati danno $\underline{s}$

$\underline{s_a} + \underline{s_b} = \underline{s}$ decomposizione nel piano è unica per ogni base

$\underline{s_a}, \underline{s_b}$ = vettori componenti



=> INFINITE SOLUZIONI



=> 0 SOLUZIONI

COMPONENTI CARTESIANE DI UN VETTORE NEL PIANO → si può parlare di componenti solo se si è definita una base



(1) $\underline{v} \cdot \underline{i} = \|\underline{v}\| \|\underline{i}\| \cos\alpha = \|v_x\| \cos\alpha \triangleq v_x$

(2) $\underline{v}' \cdot \underline{i} = \|\underline{v}'\| \cos\alpha' \triangleq v'_x$

$\underline{v}_x = +v_x \underline{i}$ $\quad \underline{v}'_x = -v'_x \underline{i}$ (v'_x: componente è negativa, metto il meno)

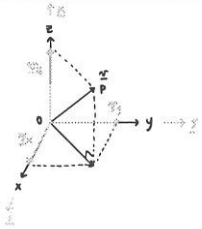
Vettore componente = la componente per il versore

\+ vettore componente concorde versore

\- " " non concorde versore

$$\underline{v} = \underline{v}_x + \underline{v}_y = v_x \underline{i} + v_y \underline{J}$$

COMPONENTI CARTESIANE DI UN VETTORE IN 3D



terna destrorsa o levogira

Le componenti di $\underline{v}$ sono le coordinate di P

$$\left.\begin{aligned} \underline{v} &= \underline{v}_x + \underline{v}_y + \underline{v}_z \\ v_x &= \underline{v} \cdot \underline{i} \\ v_y &= \underline{v} \cdot \underline{J} \\ v_z &= \underline{v} \cdot \underline{K} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underline{v} = v_x \underline{i} + v_y \underline{J} + v_z \underline{K}$$ DECOMPOSIZIONE UNICA

Modulo non dipende da sistema di riferimento, le componenti sì => modulo è detto un' INVARIANTE

$$\|\underline{v}\|^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \Rightarrow \|\underline{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

$$\underline{v} = (v_x, v_y, v_z)$$

$$\underline{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}$$