ALESSIO ARTONI

LEZIONI DI MECCANICA RAZIONALE - GIULIO MATTEI

{ ENGENEERING MECHANICS, STATICS - J.L. MERIAM WILEY
DINAMICS

↓
7ª EDIZIONE

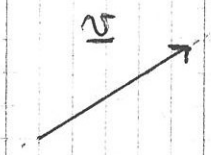
1 anno tra i due moduli

master COPY COPISTERIA

LEZIONE 1 (online) 02/10/20

RICHIAMI DI ALGEBRA VETTORIALE

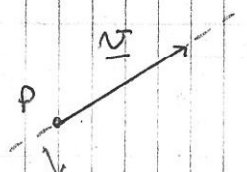
1 VETTORI



Tutti i vettori hanno una direzione, un verso (codificato dalla freccia) e un modulo o intensità

VETTORE LIBERO = un vettore libero è definito da direzione, verso e intensità.

VETTORE APPLICATO = un vettore applicato è definito da direzione, verso, intensità e punto di applicazione



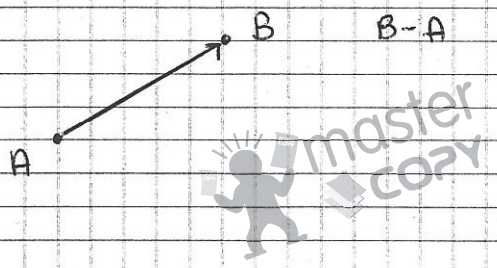
RETTA DI APPLICAZIONE = retta univocamente definita dalla direzione e dal punto di applicazione di un vettore che giace su essa.

Un esempio di vettore applicato sono le forze (agiscono in un punto specifico e possono essere spostate lungo la retta di applicazione per il principio di trasmissibilità)

Un esempio di vettore libero è la velocità angolare di un corpo rigido

Dati due punti A, B la differenza B - A è un vettore che unisce i due punti e punta su B.

⇒ Quindi la differenza di punti nello spazio euclideo è un vettore.



master copy

VERSORE = vettore di modulo unitario

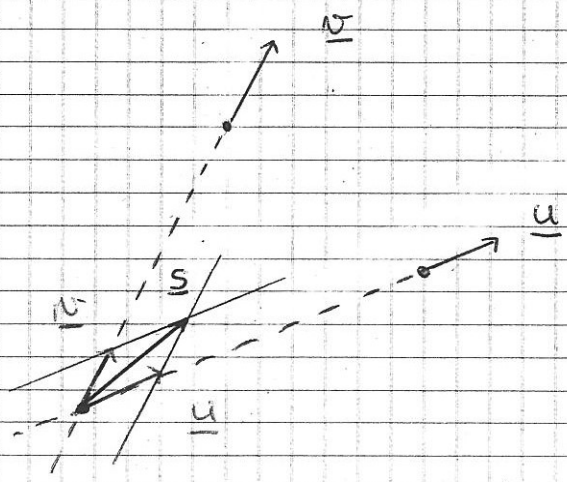
OPERAZIONI TRA VETTORI

SOMMA

Supponiamo di avere nel piano due vettori $\underline{u}$ e $\underline{v}$

Un modo per fare nel piano la somma è la REGOLA DEL PARALLELOGRAMMA:

Si traslano i due vettori in modo tale che i punti di applicazione si trovino nell'intersezione delle loro rette di applicazione e poi ottengo la somma grafica dei due vettori con la regola del parallelogramma.



Quindi faccio partire dalle punte dei vettori traslati due rette una parallela alla direzione di $\underline{v}$ e una parallela alla direzione di $\underline{u}$

La risultante (vettore somma) è il vettore che unisce l'origine comune all'altro vertice del parallelogramma.

Quindi sappiamo che

$$\underline{s} = \underline{u} + \underline{v}$$

Esiste un altro tipo di somma grafica che si usa nel caso di vettori liberi.

Avendo il vettore $\underline{u}$, posso spostare il vettore $\underline{v}$ e metterlo sulla coda di $\underline{u}$

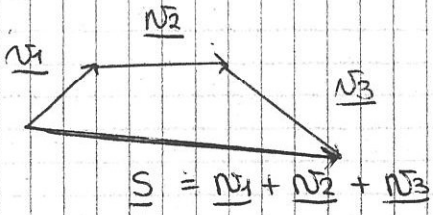


La somma è il vettore $\underline{s} = \underline{u} + \underline{v}$ che unisce la coda di $\underline{u}$ e la testa di $\underline{v}$

Questo metodo prende il nome di SOMMA TESTA-CODA che però è applicabile solo in caso di vettori liberi o nel caso in cui quelle rette siano le effettive rette di applicazioni dei due vettori.

Questo perché i vettori applicati NON possono essere portati al di fuori della loro retta di applicazione

Il metodo testa-coda vale per n vettori:

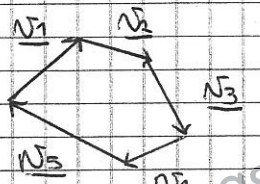


DIFFERENZA

$$\underline{d} = \underline{u} - \underline{v} = \underline{u} + (-\underline{v})$$

$(-\underline{v})$ → VETTORE $\underline{v}$ CAMBIATO DI VERSO

Perché la somma di vettori in serie (metodo testa-coda) dia il VETTORE NULLO è necessario che l'ultimo vettore della catena si richiuda sul punto iniziale



$\underline{S} = \underline{0}$

↳ VETTORE NULLO

PRODOTTO DI UNO SCALARE PER UN VETTORE

$\underline{w} = c\,\underline{u} \qquad c \in \mathbb{R}$

Il risultato del prodotto di uno scalare per un vettore è un VETTORE $\underline{w}$ che ha:

- stessa direzione di $\underline{u}$ $\Rightarrow$ dir $\underline{u}$ $\equiv$ dir $\underline{w}$
- verso che coincide con quello di $\underline{u}$ se $c > 0$, altrimenti è opposto
- modulo c volte quello di $\underline{u}$ $\Rightarrow$ $\|\underline{w}\| = |c|\,\|\underline{u}\|$

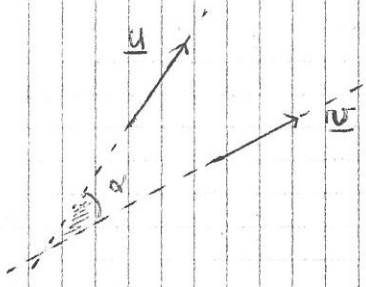
Un esempio di tale prodotto è la seconda legge di Newton

$m\,\underline{a} = \underline{F}$

PRODOTTO SCALARE (tra due vettori)

$\underline{u} \cdot \underline{w} = \|\underline{u}\|\,\|\underline{w}\| \cos\alpha \qquad \in \mathbb{R}$ (RISULTATO SCALARE!)

α è l'angolo compreso tra i due vettori



$\alpha \in [0, \pi]$

Questa relazione ci permette di ottenere l'angolo tra due vettori:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\underline{u} \cdot \underline{v}}{\|\underline{u}\| \, \|\underline{v}\|}\right)$$

CASI DI NULLITÀ DEL PRODOTTO SCALARE:

1) $\underline{u} = \underline{0}$
2) $\underline{v} = \underline{0}$
3) $\cos\alpha = 0 \iff \alpha = \frac{\pi}{2}$ cioè $\underline{u} \perp \underline{v}$

Un esempio di prodotto scalare è il lavoro di una forza.

PRODOTTO VETTORIALE (tra due vettori)

$\underline{u} \times \underline{v} = \underline{w}$

$\underline{w}$ è un vettore che ha le seguenti caratteristiche:

- $\|\underline{w}\| = \|\underline{u}\| \, \|\underline{v}\| \sin\alpha$
- la direzione è ortogonale ai vettori di partenza, cioè $\underline{w} \perp \underline{u}$ e $\underline{w} \perp \underline{v}$
- il verso segue la regola della mano destra (RHR):
  - pollice lungo $\underline{u}$
  - indice lungo $\underline{v}$

  e il medio indica direzione e verso di $\underline{w}$

RHR = right hand rule