Fondamenti di Meccanica per la Bioingegneria (12 CFU)

Prof: Alessio Artoni

Modulo I: Meccanica I

master COPY

Statica

Studio dei corpi in equilibrio statico

Si parla di statica ogni volta che le accelerazioni sono trascurabili o nulle.

master COPY

Cinematica

Studio del movimento dei corpi

Testo di riferimento: Giulio Mattei Lezioni di Meccanica razionale

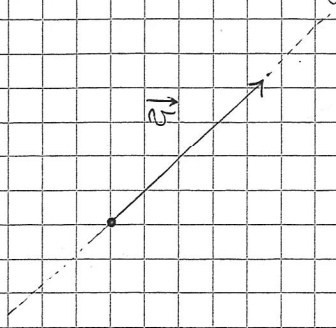
Engeneering Mechanic Statics e Dynamics di Meriam L. G.

master COPY

master COPY

master COPY

Richiami di algebra vettoriale

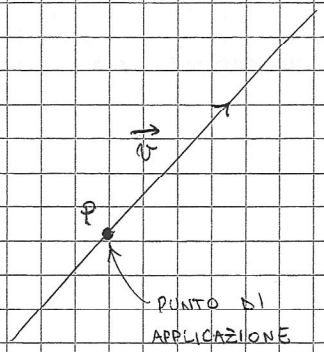


Vettore: Oggetto geometrico dotato di:

- Direzione
- Modulo o intensità
- Verso

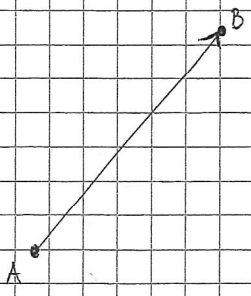
Un vettore si dice libero se possiede solo modulo, direzione e verso (senza punto di applicazione).

Un vettore si dice applicato se oltre a modulo, direzione e verso possiede anche un punto di applicazione P che definisce univocamente la retta di applicazione del vettore.



La differenza di punti nello spazio euclideo è un vettore:

B - A

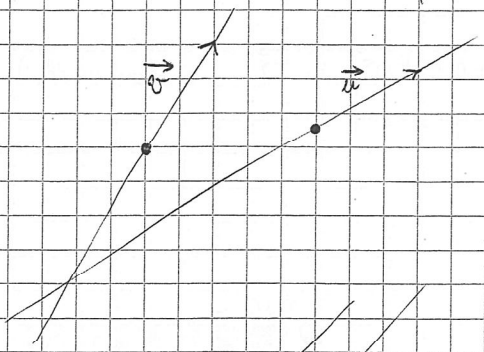


Operazioni con i vettori

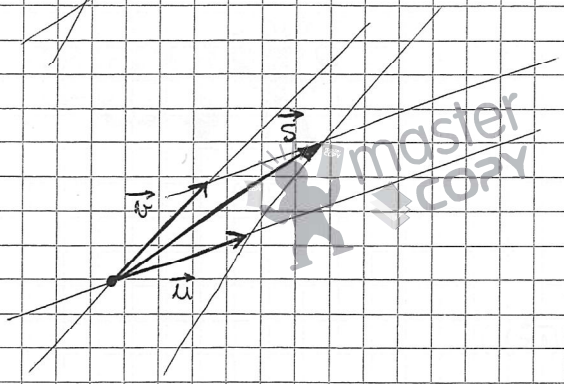
Somma



Uso la regola del parallelogramma:



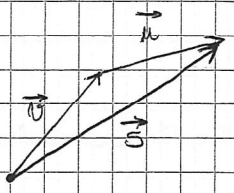
Sposto $\vec{u}$ e $\vec{v}$ lungo le rispettive rette di azione e applico la regola del parallelogramma.

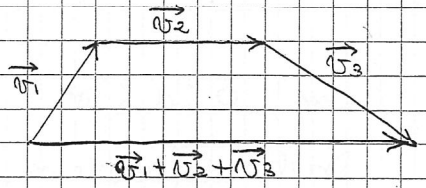


$\vec{s} = \vec{u} + \vec{v}$

master COPY

L'alternativa al parallelogramma è il metodo punta-coda:
Porto i vettori fuori dalle rette d'azione e metto la coda del secondo sulla punta del primo.
N.B. Posso usare questo metodo se e solo se i vettori non sono applicati, questo perché solo in questo caso è lecito portarli fuori dalle rette d'azione.

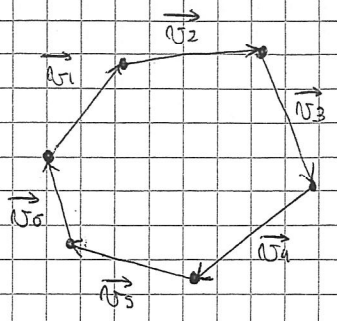




master COPY

Differenza:
$d = \vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$
$-\vec{v}$ è il vettore $\vec{v}$ cambiato di segno.
Quindi la differenza è banalmente una somma di un primo vettore per l'opposto del secondo.

Affinché il metodo punta-coda di $\vec{0}$ il punto di inizio della catena di vettori deve coincidere con il punto di fine.



$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 + \vec{v}_4 + \vec{v}_5 + \vec{v}_6 = \vec{0}$ (vettore nullo)

Prodotti

Prodotto di uno scalare per un vettore

$c \cdot \vec{u} = \vec{v}$ con $c \in \mathbb{R}$

Il vettore risultante $\vec{v}$ ha:

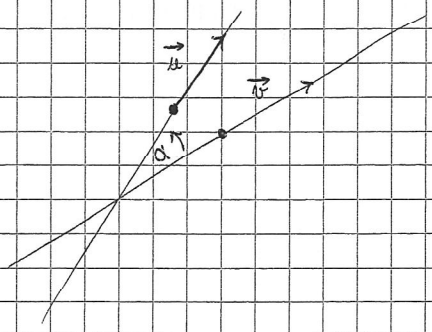
- Stessa direzione di $\vec{u}$ $(dir(\vec{u}) \equiv dir(\vec{v}))$
- Verso concorde con $\vec{u}$ se $c > 0$ e discorde (opposto) se $c < 0$, nullo se $c = 0$
- $\|\vec{v}\| = |c| \|u\|$ (Come notazione tra scalare e vettore non si mettono simboli "·" o "×")

Ad esempio:

$m\vec{a} = \vec{F}$

Prodotto scalare tra due vettori

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\alpha) \in \mathbb{R}$



con $0 \leq \alpha \leq \pi$

Dalla definizione posso ottenere α come:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}\right)$$

Casi di nullità del prodotto scalare:

- $\vec{u} = \vec{0}$
- $\vec{v} = \vec{0}$
- $\cos(\alpha) = 0 \iff \alpha = \pi/2 \iff \vec{u} \perp \vec{v}$

Esempio:

$\mathcal{L} = \|\vec{F}\| \|\vec{x}\| \cos(\alpha)$

Prodotto vettoriale tra due vettori

$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{w}$

Come è definito $\vec{w}$:

- $\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \operatorname{sen}(\alpha)$
- $\operatorname{dir}(\vec{w})$ è $\perp \operatorname{dir}(\vec{u}), \operatorname{dir}(\vec{v})$
- Verso: Regola della mano destra

Regola della mano destra: Metto il pollice lungo $\vec{u}$, l'indice lungo $\vec{v}$ e il medio mi darà il verso di $\vec{w}$ nella direzione ortogonale al piano individuato da $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Nota bene:

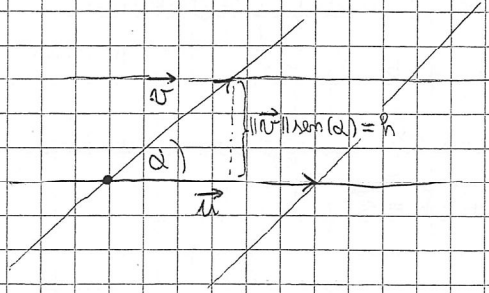
Il prodotto vettoriale è anticommutativo:

$\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$

Casi di nullità del prodotto vettoriale:

- $\vec{u} = 0$
- $\vec{v} = 0$
- $\vec{u} \parallel \vec{v}$

Interpretazione geometrica:



$\|\vec{u}\| \underbrace{\|\vec{v}\| \operatorname{sen}(\alpha)}_{h}$

A livello intuitivo il modulo del prodotto vettore è l'area del parallelogramma che formano $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Questo perché $\vec{u}$ è la base e $h = \|\vec{v}\| \operatorname{sen}(\alpha)$ è l'altezza.

Prodotto misto

$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = a \in \mathbb{R}$

Se il prodotto misto si annulla vuol dire che:

- $(\vec{u} \times \vec{v}) \perp \vec{w} \Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ sono complanari

Se il prodotto misto non si annulla allora geometricamente ho il parallelepipedo avente $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ come lati.