29-09-16 BACCI

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Aspetti da trattare:
- cambiamenti di forma senza considerare le forze
- equilibrio globale + eq. interno (assioma Eulero) senza cambiamenti di forma

ASSIOMA DI SEPARAZIONE DI EULERO:
Se un corpo è in equilibrio, ogni sua parte lo è.

CAUSE: FORZE ⟹ EFFETTO: CAMBIAM. FORME

- "Legge di Cauchy" o "Legge di Hooke generalizzata".
- "Problema di Saint Venant"
- "Problema di estinsione degli effetti locali".
- "Fenomeno di instabilità elastica"
- "Verifiche di deformabilità".

le proprietà di un corpo continuo sono individuate da funzioni che dipendono dalla posizione.

CINEMATICA DELLA DEFORMAZIONE

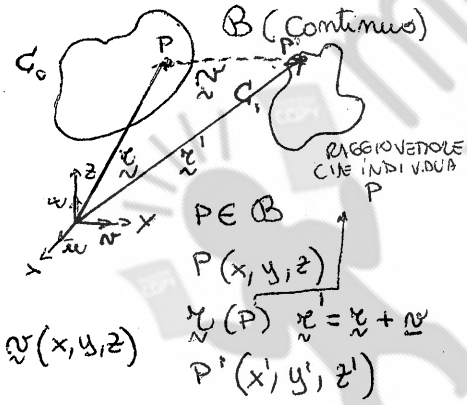
Deformazione = numero ≠ Spostamento

Abbiamo un corpo in una certa configurazione, corpo continuo → continuo: le sue proprietà variano con continuità da punto in punto.

Prendendo un sistema di riferimento, ogni punto del corpo è individuato da una terna $P(x,y,z)$

LA CONFIGURAZIONE: insieme dei punti del corpo con le loro coordinate.

Applicando un carico, attraverso un passaggio continuo, passo caricare la configurazione da C_0 a C_1.



Nel modo con cui si passa da C_0 a C_1 non ci interessa, ma ci interessa il cambiamento di coordinate del punto. Nel passare da C_0 e C_1 applico vettore spostamento che manda ogni punto nella nuova configurazione.

"SI PASSA DA P a P' TRAMITE $\underset{\sim}{v}$". Il vettore $\underset{\sim}{v}$ è chiamato campo vettoriale ed è definito nei punti P nella config. C_0. Le componenti del vettore $\underset{\sim}{v}$:

$$\underset{\sim}{v}(x,y,z) = (u,v,w)$$

componenti vettore spostamento u v e w secondo gli assi x,y,z.

Abbiamo applicato una LEGGE DI TRASFORMAZIONE CHE COLLEGA LE COORDINATE FINALI ALLE INIZIALI DI P. ne individua la posizione di P'

$$\begin{cases} x' = x + u \\ y' = y + v \\ z' = z + w \end{cases}$$

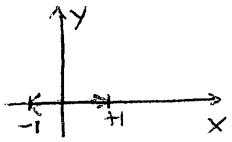
$$\underset{\sim}{r}' = \underset{\sim}{r} + \underset{\sim}{v}$$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Quali sono i requisiti che dobbiamo imporre a $\underset{\sim}{v}$?

1. CONTINUITÁ. Cosa succede se la funzione $\underset{\sim}{v}$ campo di spostamenti non fosse continua?

Supponiamo che che i punti che stanno in $x>0$ si spostino a $+1$, e $x<0$ a -1; si verifica che c'è distacco: dunque perdita di continuità = DISTACCO =



ROTTURA DEL MATERIALE.

$x \geq 0 \rightarrow +1$

$x < 0 \rightarrow -1$

$\underset{\sim}{v}$

Dunque per ora non occupiamoci di rotture del corpo.

2. DERIVABILITÁ. Cosa succederebbe se $\underset{\sim}{v}$ non fosse derivabile?

Una funzione derivabile è regolare ⌒, non ⌓. Solitamente dove $\underset{\sim}{v}$ è continua è anche derivabile, perché nelle cuspidi ad esempio si concentrano sforzi. Una soluzione alla cuspide potrebbe essere un passaggio al limite: ∧ con cerchio di estremità. Il risultato tende al risultato effettivo anche se non lo è. (Nelle realtà non esistono cuspidi, ma ci sono sempre raggi di curvature). Supponiamo $\underset{\sim}{v}$ continua e C^∞

Però anche essendo continua e derivabile, si possono presentare altri problemi, legati alla trasformazione. FACCIAMO UN CAMBIAMENTO DI DOMINIO

Supponiamo di definire ρ_0 DENSITÁ DI MASSA nella configurazione C_0;

$\rho_0(x,y,z)$ dopo aver deformato il corpo, la densità è variata;

$\rho'(x',y',z')$. Il nostro corpo aveva una massa:

$\rho_0(x,y,z) \longrightarrow m = \int_V \rho_0 \, dv$ $\qquad$ $\rho'(x',y',z') \longrightarrow m = \int_{V'} \rho' \, dv'$

CAMBIAMENTO DI DOMINIO DI INTEGRAZIONE: MA LA MASSA È LA STESSA, ANCHE LOGICAMENTE.



$\rho_0 dv = dm$

$\rho' dv' = dm$

Il volume dv è cambiato a dv', ma la massa che era nel volume iniziale è la stessa di quello finale, allora:

$\rho' dv' = \rho_0 dv$

sapendo che $dv' = |J| \, dv$ (DETERMINANTE JACOBIANO per passare da un dominio all'altro)

$\rho' |J| dv = \rho_0 dv$

$\Rightarrow \rho' |J| = \rho_0$

Se il determinante Jacobiano fosse $=0$, ci sarebbe perdita di dimensione!

Deve essere anche maggiore di zero per mantenere ρ_0 e ρ' maggiori di zero.

Dunque la trasformazione può avvenire soltanto se $|J| > 0$.

$$\underset{\sim}{J} = \begin{bmatrix} 1+\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & 1+\frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & 1+\frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (+ Id)$$

MATRICE JACOBIANA

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

3. $|J| > 0$

4. $\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|, \ldots << 1$ in modo che i loro quadrati ecc siano trascurabili rispetto ai prodotti

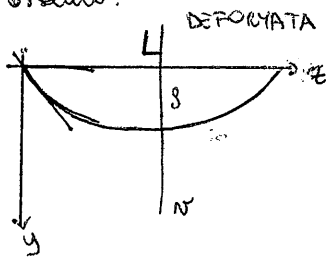
termini lineari: TEORIA LINEARE.

Per queste ipotesi, il determinante Jacobiano è: $|J| = 1 + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} > 0$ → la trasformazione è anche fisicamente ammissibile. Questa somma di derivate è la divergenza

$= 1 + \operatorname{div}(\underset{\sim}{v})$ del vettore $\underset{\sim}{v}$

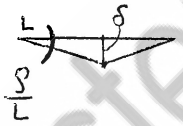
$1 + \operatorname{div}(\underset{\sim}{v})$ è una quantità che resta invariata. INVARIANTE

Limitiamo il nostro studio ai casi in cui le derivate siano piccole di valore assoluto.



$\frac{\delta}{L}$ è presente dall'angolo rotazione. → tangente alla deformata

Se $\frac{\delta}{L}$ è piccolo, allora anche $\frac{\partial v}{\partial z}$ è molto piccolo, e torno alla vale prima. $\frac{\partial v}{\partial z}\partial z = 0$ in $\frac{L}{2}$



La deformazione è piccola rispetto alla luce della trave $\Rightarrow \frac{\delta}{L}$ piccolo.

Come troviamo la matrice Jacobiana partendo da $\begin{cases} x' = x + u \\ y' = y + v \\ z' = z + w \end{cases}$?



$P(x, y, z)$

$\underset{\sim}{v}(x, y, z) = (u, v, w)$ VETTORE SPOST DEFINITO IN P.

Le coordinate del punto Q le trovo tramite quelle di P tramite una variazione di posizione.

Prendiamo un intorno di P. Esso Q: $Q(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z)$. Passo a Q tramite $\underset{\sim}{\delta} = (\delta x, \delta y, \delta z)$ COMPONENTI. $|\underset{\sim}{\delta}| << 1$ VETTORE SPOSTAMENTO

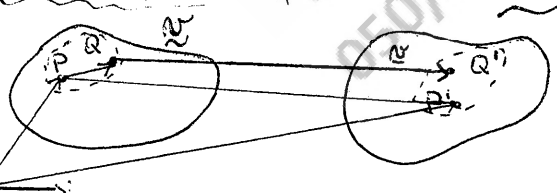
$|\underset{\sim}{\delta}|$ è molto piccolo per poter trascurare nello sviluppo di Taylor le derivate di δx δy e δz. Il vettorino $\underset{\sim}{\delta}$ si può definire a partire da P o da Q, ma per definire una cosa rispetto ad un'altra si usa Mc Laurin e Taylor.

$Q(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z) \longrightarrow \underset{\sim}{v}(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z) = \longrightarrow Q'(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$

TRAMITE $\underset{\sim}{v}$ VA NELLA NUOVA CONFIGURAZIONE

COMPONENTI: $= \left[u + \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_P \delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_P \delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_P \delta z, \ldots\right]$ coord. spost. def. in Q.

$(|_P$ calcolato in P) NUOVA CONFIGURAZIONE



Se P sta in un intorno di Q, anche P' starà nell'intorno di Q', e accade solo se $|J| > 0$, ovvero funzione localmente invertibile.

$$\begin{cases} \bar{x} = x + \delta x + \underbrace{u + \frac{\partial u}{\partial x}\delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\delta z}_{x'} = \\ = \underbrace{x + u}_{x'} + \underbrace{\delta x\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial u}{\partial y}\delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\delta z}_{\delta x'} \\ \bar{y} = y' + \underbrace{\delta x\frac{\partial v}{\partial x} + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right)\delta y + \frac{\partial v}{\partial z}\delta z}_{\delta y'} \\ \bar{z} = z' + \underbrace{\frac{\partial w}{\partial x}\delta x + \frac{\partial w}{\partial y}\delta y + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\delta z}_{\delta z'} \end{cases}$$

← TAYLOR CENTRATO IN $x + \delta x$

- $x + u$ era x', dunque la coordinata nuova di P, dunque di P'.
- $\delta x'$: variazione di posizione di Q' rispetto a P'.

Questa è la trasformazione di Q':

$$\underset{\sim}{v} = \left(u + \frac{\partial u}{\partial x}\delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\delta z,\ v + \frac{\partial v}{\partial x}\delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\delta y + \frac{\partial v}{\partial z}\delta z,\ w + \frac{\partial w}{\partial x}\delta x + \frac{\partial w}{\partial y}\delta y + \frac{\partial w}{\partial z}\delta z\right)$$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

$$\begin{cases} \delta x' = \left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)\delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\delta z \\ \delta y' = \dots \\ \delta z' = \dots \end{cases}$$

Sistema lineare. Supponiamo di avere come incognite $\delta x, \delta y, \delta z$

Se il determinante Jacobiano è >0 posso divertirmi le cose, così trovo $\delta x\ \delta y$ e δz a partire da $\delta x'\ \delta y'\ \delta z'$ & viceversa.

$\begin{pmatrix} \delta x' \\ \delta y' \\ \delta z' \end{pmatrix}$ vettore termini noti

$$\det\begin{bmatrix} 1+\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \neq 0$$

MATRICE COEFFICIENTI

Se det della Jacobiano è $\neq 0$ posso determinare $\delta x, \delta y, \delta z$ a partire da $\delta x'\ \delta y'\ \delta z'$.

per ammissibilità FISICA deve essere >0:

$J \neq 0$: da un intorno di $\mathbb{R}^3$ posso ad un intorno di $\mathbb{R}^3$.

$$\underset{\sim}{J} = \underset{\sim}{I} + \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$\left(\begin{matrix} \text{MATRICE} \\ \text{IDENTITÀ} \end{matrix}\right)$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \nabla \underline{v}$

gradiente di spostamento : si scompone in TENSORE DI DEFORMAZIONE (parte simmetrica) + MATRICE ROTAZIONE (parte antisimmetrica)

$$\begin{cases} \delta x' = \left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)\delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\delta z \\ \delta y' = \frac{\partial v}{\partial x}\delta x + \left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\delta y + \frac{\partial v}{\partial z}\delta z \\ \delta z' = \frac{\partial w}{\partial x}\delta x + \frac{\partial w}{\partial y}\delta y + \left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\delta z \end{cases}$$

$$\delta s = \overline{PQ} = \sqrt{\delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2}$$

$$\delta s' = \overline{P'Q'} = \sqrt{(\delta x')^2 + (\delta y')^2 + (\delta z')^2}$$

$\underline{n}$ versore che indica la direzione di $\overline{PQ}$

$\underline{n} \equiv (l, m, n)$ coseni direttori, tali che $l^2 + m^2 + n^2 = 1$

$$\left.\begin{aligned} \delta x &= l\,\delta s \\ \delta y &= m\,\delta s \\ \delta z &= n\,\delta s \end{aligned}\right| \text{ SOSTITUISCO NEL SISTEMA}$$

$$\begin{cases} \delta x' = \left[\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)l + \frac{\partial u}{\partial y}m + \frac{\partial u}{\partial z}n\right]\delta s \\ \delta y' = \left[\frac{\partial v}{\partial x}l + \left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right)m + \frac{\partial v}{\partial z}n\right]\delta s \\ \delta z' = \left[\frac{\partial w}{\partial x}l + \frac{\partial w}{\partial y}m + \left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right)n\right]\delta s \end{cases}$$

Quanto vale $\delta s'$ in termini di $\delta x\ \delta y\ \delta z$?

$$\delta s' = \left\{\left[l^2\left[1+2\frac{\partial u}{\partial x}+\cancel{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}\right] + \cancel{\left(\frac{\partial u}{\partial y}m\right)^2} + \cancel{\left(\frac{\partial u}{\partial z}n\right)^2} + 2\frac{\partial u}{\partial y}lm + \cancel{\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}}lm + \dots\right]\right\}^{1/2}$$

Il risultato sarà $\sqrt{1+2\varepsilon}$ e dipende da l, m, n, e ci rimangono solo elementi parte simmetrica del gradiente di SPOSTAMENTO

Con Taylor: $\sqrt{1+2\varepsilon} = 1+\frac{1}{2}2\varepsilon + \dots = 1+\varepsilon$

La variazione di lunghezze può essere espressa come: LUNGHEZZA INIZIALE + ε · LUNGHEZZA FINALE

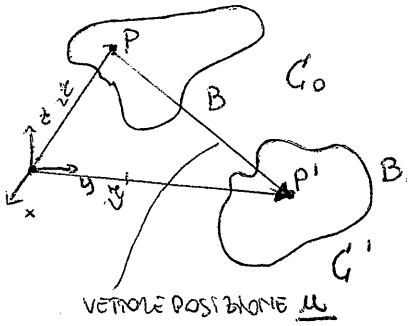
$$\delta s + \delta s \cdot \varepsilon$$

MASTER COPY Tel. 050 8312126 Cell. 388 9837745

20-10-16 BACCI

Affinché una trasformazione sono tollerabile $|J| \neq 0$, questo ciò prevede dimostrazioni. In particolare $|J| > 0$ per la conservazione della massa.

$\underset{\sim}{u}(x,y,z)$ $P(x,y,z)$



Insieme di tutti i punti, note le coordinate: CONFIGURAZIONE. C_0

A noi non interessa la causa del cambio di configurazione, solo l'effetto

$P'(x',y',z')$

$\underset{\sim}{u}(x,y,z) = (u,v,w)$

$\underset{\sim}{x}' = \underset{\sim}{x} + \underset{\sim}{u}$: TRASFORMAZIONE

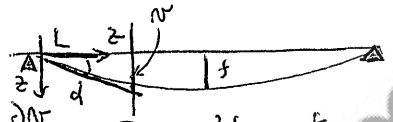
$$\begin{cases} x' = x + u(x,y,z) \\ y' = y + v(x,y,z) \\ z' = z + w(x,y,z) \end{cases}$$

Questa è la mostra trasformazione.

$\delta x' = \delta x + \frac{\partial u}{\partial x}\delta x + \dots$

$\delta y' = \delta y + \frac{\partial v}{\partial y}\delta y + \dots$

$\delta z' = \delta z + \frac{\partial w}{\partial z}\delta z + \dots$



$\frac{\partial v}{\partial z} = \tan\gamma \cdot d \sim \frac{2f}{L} \sim \frac{f}{L}$

$\frac{f}{L} = \frac{\text{ABBASSAMENTO}}{\text{LUNGHEZZA}} << 1$ allora le componenti della funzione (coordinate dello spostamento) sono $<<1$

Solo i termini lineari in $\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right| \dots << 1$ TEORIA LINEARIZZATA

Allora i loro prodotti $\left|\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial z}\right| << \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|$, e quelli i loro cubi.

$$|J| = \begin{vmatrix} 1+\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & 1+\frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & 1+\frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix} = 1 + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 1 + \text{diverg}(\underset{\sim}{u})$$

$$\underset{\sim}{J} = \underset{\sim}{I} + \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$\underset{\sim}{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\nabla \underset{\sim}{u}$

COMPONENTE ANTISIMMETRICA DEL GRADIENTE DI SPOSTAMENTO

$\nabla \underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{D} + \underset{\sim}{\Omega}$

↑ PARTE SIMMETRICA DEL GRADIENTE DEVO SOMMARLA A QUALCOSA CHE POI MI FA OTTENERE IL GRADIENTE

Nei nostri conti entrerà in gioco solo la parte simmetrica D, ecco perché scomponiamo.

GRADIENTE SPOSTAMENTO

$$\textcircled{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \cdot & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ = & = & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \quad \textcircled{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) & -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) & 0 \end{bmatrix}$$

Master CAD COPY COPISTERIA 050/8312125 388/9837745