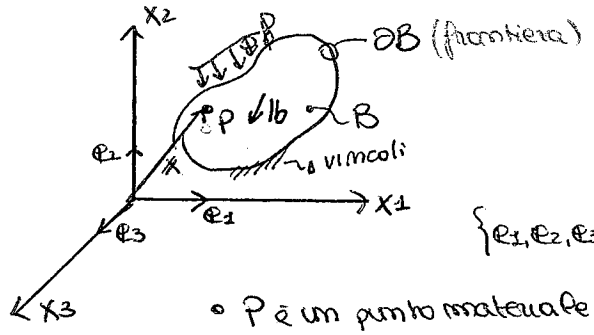
MECCANICA DEI SOLIDI

BACIGALUPO

La meccanica dei solidi studia la statica e la dinamica di un corpo solido



Il corpo può essere soggetto a:
- forze di superficie f
- forze di volume lb
- vincoli (che impediscono il movimento)

$\{e_1, e_2, e_3\}$ base canonica in $\mathbb{R}^3$

- P è un punto materiale del corpo B di frontiera ∂B
- x è un vettore posizione
- lb vettore forza di volume (agiscono per unità di volume)
- f vettore forza di superficie (agiscono per unità di superficie)

Unità di misura

$[x] = L$ (m)

$[lb] = \frac{F}{L^3}$ (N/m^3)

$[f] = \frac{F}{L^2}$ (N/m^2)

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Le forze si possono classificare in 3 tipi:

- AZIONI A DISTANZA (forze di volume) → es. forza peso, forza elettromagnetica
- AZIONI DI CONTATTO (forze di superficie) → es. forza di attrito, forza elastica, forze fluidodinamiche, reazioni vincolari
  - interne ad un corpo
  - esterne ad un corpo

OSSERVAZIONE

e_1, e_2, e_3 sono VERSORI → $|e_1| = |e_2| = |e_3| = 1$

$$e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \quad ; \quad e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \quad ; \quad e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

- $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 = x_i e_i \quad (i = 1,2,3)$

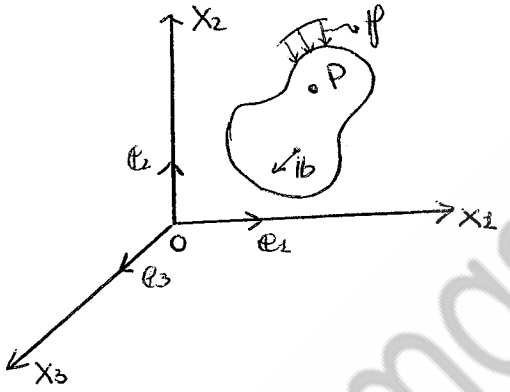
perché gli indici si ripetono è sottintesa la sommatoria

- $\mathbf{b} = b_i \mathbf{e}_i$
- $\mathbf{f} = f_i \mathbf{e}_i$

In forma alternativa: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$; $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$; $\mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$

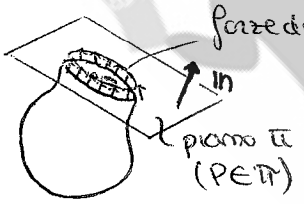
STATO DI TENSIONE

La tensione è una forza di contatto interna che misura e descrive lo stato di sforzo interno in tutti i punti del corpo solido → quindi è una forza di superficie



MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

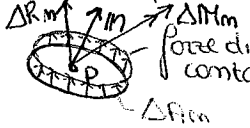
Prendo un piano passante per P, con una normale generica e "affetta" il piano
Chiamo questo piano π, con normale $\mathbf{n}$.
Sulla sezione posso avere una distribuzione di forze di contatto che possono essere distribuite in modo uniforme.



La porzione superiore del corpo subirà forze di contatto interne uguali e opposte per il principio di azione-reazione

- $\mathbf{n}$ è versore normale al piano π
- le forze di contatto interno misurano le 2 porzioni di solido, tagliate dal piano π, si scambiano (principio azione-reazione)

Vado a prendere una piccola porzione di area: ΔA_m : area piccola ma finita



$\Delta \mathbf{R}_m$: vettore forza risultante
$\Delta \mathbf{M}_m$: vettore momento risultante (rispetto al polo P)

Concetto di tensione secondo Cauchy → dà interpretazione a $\lim = \frac{0}{0}$ dicendo che esistono (postulati di esistenza della tensione)

- $\lim_{\Delta A_m \to 0} \frac{\Delta R_m}{\Delta A_m} = \left[\frac{0}{0}\right] \doteq \underbrace{\$_m}_{\text{vettore della tensione}}$ (continuo di Cauchy)

Se l'area tende a zero, la risultante delle forze che agisce è nulla

- $\lim_{\Delta A_m \to 0} \frac{\Delta M_m}{\Delta A_m} = \left[\frac{0}{0}\right] \doteq 0$ Non esistono microcoppie concentrate nel corpo solido

Osservazione: ΔA_m deve tendere a 0 in modo omotetico (il cerchio si stringe fino a raggiungere il punto P)

Il corpo solido è descritto mediante il modello di continuo di Cauchy

Osservazione continuo di Cosserat

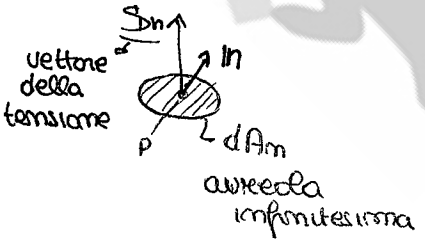
$$\lim_{\Delta A_m \to 0} \frac{\Delta R_m}{\Delta A_m} \doteq \tilde{\$}_m$$

$$\lim_{\Delta A_m \to 0} \frac{\Delta M_m}{\Delta A_m} \doteq m_m$$

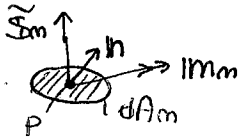
↑ microcoppie puntuali

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Modello di continuo di Cauchy

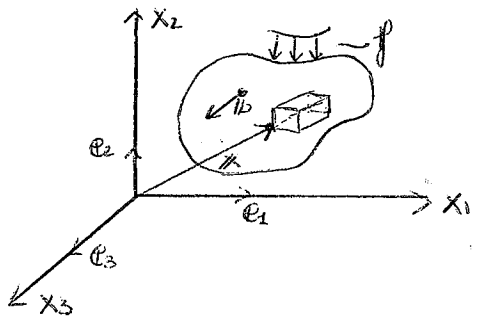


Modello di continuo di Cosserat

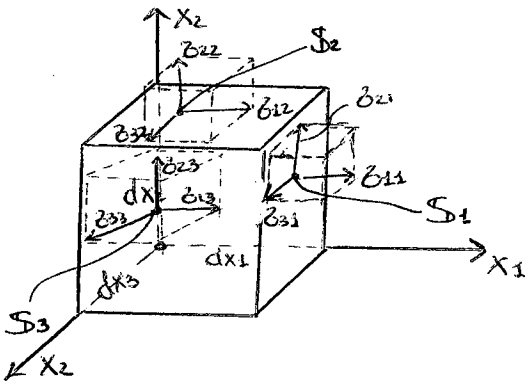


descrive bene il comportamento di un corpo solido, ma ha delle mancanze in zone spigolose, maggiormente concentrate → modello normalmente usato

Analisi della tensione



Vado ad isolare una porzione (cubetto) e studio le forze che tutto il resto del fluido esercitano su quella porzione



Su ognuna di queste facce deve agire un opportuno vettore della tensione.

S_1 = vettore della tensione che agisce sul piano che ha versore e_1

S_2 = " " " " " " " " " " " " e_2

S_3 = " " " " " " " " " " " " e_3

$$S_1 = \sigma_{11} e_1 + \sigma_{21} e_2 + \sigma_{31} e_3$$
$$S_2 = \sigma_{12} e_1 + \sigma_{22} e_2 + \sigma_{32} e_3$$
$$S_3 = \sigma_{13} e_1 + \sigma_{23} e_2 + \sigma_{33} e_3$$

$$S_1 = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{21} \\ \sigma_{31} \end{pmatrix} \quad S_2 = \begin{pmatrix} \sigma_{12} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{32} \end{pmatrix} \quad S_3 = \begin{pmatrix} \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

σ_{31}: direzione → giacitura del versore

1° indice indica la direzione

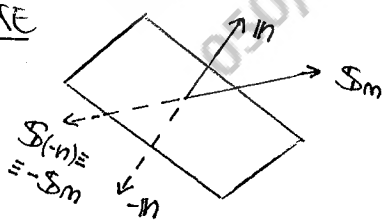
2° " " " giacitura del versore

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

In generale: $S_i = \sigma_{ji} e_j \quad (i,j = 1,2,3)$

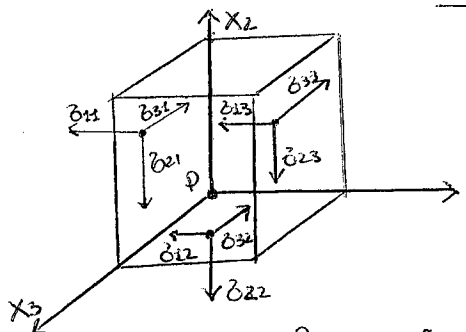
indice libero; indice ripetuto

OSSERVAZIONE



$S_n(x, n)$

$S_{(-n)}(x, -n) = -S_n(x, n)$



Componenti di vettori della tensione che agiscono su piani coordinati di normale $-e_1, -e_2, -e_3$

$$\Pi = \sigma_{ji} e_j \otimes e_i$$

Π: tensore della tensione; $\otimes$: prodotto diadico

(tensore del 2° ordine)

Ricorda $S_i = \sigma_{ji} e_j \rightarrow \Pi = S_i \otimes e_i = S_1 \otimes e_1 + S_2 \otimes e_2 + S_3 \otimes e_3$

OSSERVAZIONE : prodotto diadico

$$S_1 \otimes e_1 = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{21} \\ \sigma_{31} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ \sigma_{21} & 0 & 0 \\ \sigma_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(3×1) (1×3) (3×3)

S_1 si va a mettere nella prima colonna del tensore $\mathbb{T}$
S_2 " " " " seconda colonna " " $\mathbb{T}$
S_3 " " " " terza colonna " " $\mathbb{T}$

} vd espressione di prima. Somma di 3 matrici

$$\mathbb{T} = \left[S_1 \mid S_2 \mid S_3 \right] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

9 componenti (non indipendenti)

OSS : per equilibrio alla rotazione del cubo infinitesimo si ha $\sigma_{ji} = \sigma_{ij}$ ↓ matrice simmetrica

$$\mathbb{T} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

6 componenti indipendenti

↓ tensore della tensione

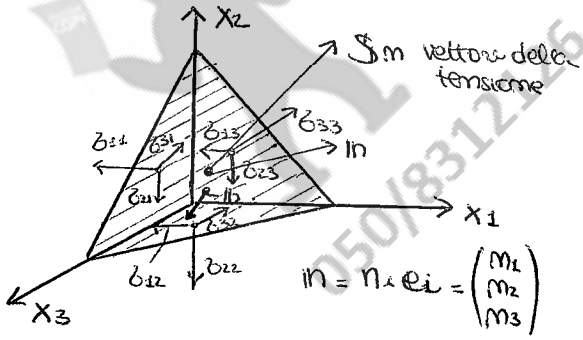
tensioni normali

→ tensioni tangenziali

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

- Noto $\mathbb{T}$, si può determinare il vettore di una tensione su un generico piano di normale n?

Sì, mediante il teorema di Cauchy



n è un versore $\Rightarrow |n| = 1$

Teorema di Cauchy

Noto il tensore della tensione $\mathbb{T}$ è possibile determinare il vettore della tensione S_m sul piano di normale n, mediante la relazione:

$$S_m = \mathbb{T} n$$

n componenti

$$S_{mj} = \sigma_{ji} n_i \quad (i,j = 1,2,3)$$

j è un indice libero
i " " " ripetuto → vado a sommarlo

$$S_{mj} = \sigma_{j1} n_1 + \sigma_{j2} n_2 + \sigma_{j3} n_3$$

- $j=1$ $S_{m1} = \sigma_{11} n_1 + \sigma_{12} n_2 + \sigma_{13} n_3$
- $j=2$ $S_{m2} = \sigma_{21} n_1 + \sigma_{22} n_2 + \sigma_{23} n_3$
- $j=3$ $S_{m3} = \sigma_{31} n_1 + \sigma_{32} n_2 + \sigma_{33} n_3$

componenti del vettore della tensione