RIASSUNTO TEORIA, PROVE D'ESAME E DOMANDE D'ESAME

ANALISI MATEMATICA I

Anno 2021-2022

In questa dispensa ho voluto:

1) riassumere la Teoria completa
2) mettere le tabelle importanti e utili x l'esame
3) aggiungere delle prove d'esame svolte & le domande tipiche dell'esame con delle possibili risposte.

Spero vi possano essere di aiuto.

INGEGNERIA CHIMICA

PROFESSORE A. BANDINI

- Alessandra De Antoniis.

master COPY

master COPY

Logica elementare e insiemi

Le **proposizioni** sono delle affermazioni "sensate" con la possibilità di decidere se sono vere o false. I **predicati** sono proposizioni che dipendono da dei parametri/variabili. I **quantificatori** sono un modo per indicare se un predicato può diventare una proposizione:

- $\forall$ "per ogni" valore dell'insieme.
- $\exists$ "esiste" almeno un valore dell'insieme.
- $\exists!$ "esiste unico" valore dell'insieme.

master COPY COPISTERIA

OPERAZIONI tra proposizioni:

P	$\neg P$
V	F
F	V

- **Negazione**: se P è proposizione → $\neg P$ è la sua negazione.
- **Congiunzione**: ho $P_1 \wedge P_2$, dove una proposizione è vera solo se lo sono entrambe.
- **Disgiunzione**: ho $P_1 \vee P_2$, con "o" non esclusivo; quindi, basta che una delle due proposizioni sia vera per essere vera.
- **Implicazione**: ho $P_1 \Rightarrow P_2 = \neg (P_1 \wedge \neg P_2) = \neg (P_1 \vee P_2)$
- **Doppia implicazione**: ho $P_1 \Leftrightarrow P_2 = (P_1 \Rightarrow P_2) \wedge (P_2 \Rightarrow P_1)$, dove entrambe le proposizioni devono essere vere o false.

P_1	P_2	$P_1 \wedge P_2$	$P_1 \vee P_2$	$(P_1 \wedge \neg P_2)$	$-(P_1 \wedge \neg P_2) = P_1 \Rightarrow P_2$	$P_2 \Rightarrow P_1$	$P_1 \Leftrightarrow P_2$
V	V	V	V	F	V	V	V
V	F	F	V	V	F	V	F
F	V	F	V	F	V	F	F
F	F	F	F	F	V	V	V

Due affermazioni di dicono **equivalenti** se hanno la stessa tabella di verità, che determina o chiarisce una situazione. Una proposizione sempre vera è detta **tautologia** (*NON si nega mai l'ipotesi*).

TEORIA DEGLI INSIEMI: l'insieme è una collezione di oggetti o elementi che hanno caratteri comuni. La descrizione può avvenire per: **elencazione, iterazione** o per **proprietà**.

- $x \in A$ "x è elemento di A".
- $B \subseteq A$ "B è contenuto o uguale ad A": $\forall x \in B \Rightarrow x \in A$
- $B \subsetneq A$ "B è contenuto e diverso da A", cioè B è un sottoinsieme improprio di A.
- $A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$

Si può notare, quindi, che A è sempre sottoinsieme di A e che il **vuoto** è sempre sottoinsieme di ogni insieme → ogni insieme, tranne il vuoto, ha almeno due sottoinsiemi propri. La **cardinalità** è il numero di elementi che un insieme contiene: $\#A$ o $|A|$. Indichiamo, poi, $\mathcal{P}(A)$ l'insieme delle parti di un insieme.

OPERAZIONI tra insiemi:

- **Unione**: $A \cup B$, che coincide con la congiunzione logica.
- **Intersezione**: $A \cap B$.
- **Differenza**: $A - B$.
- **Differenza simmetrica**: $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$.
- **Complementare**: $A^C = (U - A)$, cioè l'insieme universo meno l'insieme di partenza.

master COPY

Troviamo le **leggi distributive**:	e le **leggi di De Morgan**:
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$ e l'opposto. $(A^C)^C = A$

(ricordiamo l'elemento neutro, inverso e il prodotto cartesiano...studiati nel corso di Algebra lineare)

master COPY COPISTERIA

INSIEMI NUMERICI

L'insieme dei ***numeri naturali N*** ha due operazioni, somma e differenza, che godono delle proprietà: commutativa, distributiva e associativa. Essi hanno un elemento neutro (lo zero) per la somma e (l'uno) per la differenza; che sono anche inversi di sé stessi, a differenza degli altri numeri che non hanno inverso. La loro **relazione di ordine** > ordine totale, ciò significa che ogni elemento può essere confrontabile con un altro. Tra le **proprietà** fondamentali troviamo: **riflessiva, antisimmetrica, transitiva** e **compatibile**.

Principio del buon ordinamento (BO): ogni sottoinsieme non vuoto di N ha un minimo rispetto alla relazione di ordine totale ⇔ **Principio di induzione**: sia $A \subseteq N$ tale che verifica:

- $\exists m \in A$, cioè l'insieme di partenza non è vuoto.
- $\forall n \geq m \quad n \in A \Rightarrow (n+1) \in A$, cioè l'insieme contiene un numero maggiore del primo e il suo successivo.

Allora $A \supseteq \{n \in N, con\ n \geq m\}$, quindi l'ipotesi induttiva è verificata solo se (n+1) è verificata.

Es. **Disuguaglianza di Bernoulli**: $\forall a \in R \wedge \forall n \in N \Rightarrow (1+a)^n \geq 1 + na$

- Controlliamo per $p(0)$: $(1+a)^0 \geq 1 + (0 * a) \Rightarrow 1 \geq 1$ che è sempre vera.
- Ora supponiamo $p(n)$ vera (per ogni $n \geq 0$), dobbiamo dimostrare $p(n+1)$ vera:
  $(1+a)^{n+1} \geq 1 + (n+1) * a \Rightarrow (1+a)^n * (1+a) \geq (1+na) * (1+a)$ (applico l'ipotesi induttiva)
  $\Rightarrow 1 + na + a + na^2 = 1 + (n+1) * a + na^2 \geq 1 + (n+1) * a$
  Sapendo che $na^2 \geq 0$ sempre, allora l'equazione di sinistra è sempre maggiore dell'equazione di destra.

BINOMIO DI NEWTON:

Partendo da delle definizioni basilari: $0! = 1$, $1! = 1$ e che $n! = n * (n+1)!$ Definiamo il coefficiente binomiale $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! * (m-k)!}$ e $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$.

→ *Prop.* $\forall n \geq 0, \forall a, b \in R$ avremo che $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} * a^k * b^{n-k}$ come ipotesi induttiva.

L'insieme dei ***numeri interi Z*** definisce $a \in N$ un $(-a)$, cioè quel numero che sommato ad *a* dà zero: $a + (-a) = 0$. Definito con le stesse proprietà di N e stesso ordinamento, ma dove l'assioma $a * 0 = 0$ trova una dimostrazione. Si aggiunge la proprietà: **fattorizzazione unica**, cioè ogni interno si scrive in maniera "unica" come $\pm$ prodotto di primi. (*def.* Un numero si dice primo se ha esattamente due divisori positivi, cioè uno e sé stesso).

L'insieme dei ***numeri razionali Q*** ha un'ambiguità rispetto alla rappresentazione ($\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a * d = c * b$). Ha le stesse proprietà di Z rispetto alla somma e differenza, mentre ha inversi rispetto al prodotto (per ogni elemento diverso da zero: $\frac{1}{a}$ è quel numero che moltiplicato per *a* dà 1). Ha lo stesso ordine di Z ma se $0 < a < b \Rightarrow 0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$, cambia il verso della disuguaglianza. Appare il concetto di **densità**, cioè $\forall a, b \in Q \ \exists c \in Q \ tc\ a < c < b \Rightarrow c = \frac{a+b}{2}$, ciò significa che non si potrà più parlare di precedente/successivo (manca però una rappresentazione decimale periodica, quindi ogni elemento è denso ma non è una successione di punti continui come una retta).

Vi è poi l'insieme dei ***numeri reali R*** è denso e continuo (come una retta). La cardinalità di R è, di conseguenza maggiore della cardinalità di Q (che è uguale a Z per la diagonale di Coutour, che è a sua volta uguale a N per dimostrazione...per curiosità). Troviamo due **assiomi** (cioè proposizioni da prendere per vera senza dimostrazione alcuna), che sono falsi in Q:

- **di separazione**: dati $A, B \subseteq R$ e $A, B \neq 0$ tc $\forall a \in A, \forall b \in B \ a \leq b$, allora $\exists c \in R\ tc\ a \leq c \leq b$ (*dim.* per assurdo per $x = \sqrt{2}$, tenendo in considerazione che bisogna dimostrare che $c^2 < 2$ e $c^2 > 2$, prima di poter dire che $c^2 = 2$ → non vale su Q perché non esiste un separatore del genere).
- **di completezza**: dato $A \subseteq R$ e $A \neq 0$ e limitato, allora $\exists\ Sup(A)$ e $\exists\ Inf(A)$ in R.

Un insieme $A \subseteq R$ con $A \neq 0$ si definisce **limitato:**

- **superiormente** se $\exists M \in R\ tc\ a \leq M\ \forall a \in A$, con M **maggiorante** di A.
- **inferiormente** se $\exists m \in R\ tc\ a \geq m\ \forall a \in A$, con m **minorante** di A.
- **completamente** se è limitato superiormente e inferiormente (confini finiti, $\pm\infty \notin R$ anche se possono rappresentare dei confini per R).

Se $A \subseteq R$ è non limitato superiormente avremo che $Sup(A) = +\infty$, se è non limitato inferiormente $Inf(A) = -\infty$.

Sia $A \subseteq R \; e \; A \neq 0$ e limitato superiormente, allora il $Sup(A)$ è il minimo dei maggioranti di A. Se invece fosse limitato inferiormente l'$Inf(A)$ è il massimo dei minoranti di A. Osserviamo quindi, che il $Sup(A)/Inf(A)$ non devono per forza essere elementi che appartengono all'insieme, mentre il $\max(A)$ /$\min(A)$ devono appartenere ad A.

$I \subseteq R$ si definisce **intervallo** se e solo se $\forall a, b \in I \;\; a \leq b \; e \; \forall c \in R \;\; a \leq cb \Rightarrow$ c ∈ I, cioè se dati 2 punti all'interno dell'intervallo, esso contiene tutto quello che c'è nel mezzo. Da cui si osserva che l'**unione di intervalli** non è, in generale, un intervallo (possono rimanere 2 intervalli separati se i confini non coincidono) e che l'**intersezione** di intervalli può essere l'insieme vuoto oppure un intervallo.

Def.(SUP) $\forall A \subseteq R, A \neq 0$ limitato superiormente e sia $M = Sup(A) = minimo\ dei\ maggioranti\ di\ A$, allora:

- M è un maggiorante di A, cioè $M \geq a \; \forall a \in A$.
- È il più piccolo dei maggioranti: $\forall \varepsilon > 0$ ∃a ∈ A tc $(M - \varepsilon) <$ a ≤ M.
  ⇒ ogni numero minore di M non può essere maggiorante di A.

Def.(INF) $\forall A \subseteq R, A \neq 0$ limitato inferiormente e sia $m = Sup(A) = massimo\ dei\ minoranti\ di\ A$, allora:

- m è un maggiorante di A, cioè $m \leq a \; \forall a \in A$.
- È il più grande dei minoranti: $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists a \in A \; tc \; m \leq a < m + \varepsilon$.
  ⇒ cioè ogni numero maggiore di m non può essere minorante di A.

master COPY COPISTERIA