LOGICA ELEMENTARE

Proposizioni → affermazioni logiche.
Quelle oggettive possono essere vere o false.

Una proposizione con al suo interno un **parametro** è un **PREDICATO**, e spesso può essere vero o falso a seconda del parametro.

→ **QUANTIFICATORI**: si usano per specificare la variabile.

- $\forall$: per ogni
- $\exists$: esiste
- $\exists!$: esiste ed è unico

→ **OPERAZIONI TRA PREDICATI**

① **NEGAZIONE**: Dato P, si ha $\neg P$ (non-P)
Tabella di verità:

P	$\neg P$
V	F
F	V

② **CONGIUNZIONE**: $P_1 \wedge P_2$ ($P_1 \in P_2$): le considero entrambe.
Tabella di verità:

P_1	P_2	$P_1 \wedge P_2$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

③ **DISGIUNZIONE**: $P_1 \vee P_2$ (P_1 o P_2): basta che una sia vera.
Tabella di verità:

P_1	P_2	$P_1 \vee P_2$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

④ IMPLICAZIONE: $P_1 \Rightarrow P_2$ (P_1 implica P_2): Se P_1 è vero deve essere anche P_2

P_1 è condizione sufficiente per P_2: se P_1 è vero, lo è sicuramente anche P_2.

P_2 è condizione necessaria per P_1: se P_2 non è vero, P_1 non è vero. $(\neg P_2 \Rightarrow \neg P_1)$

Tabella di verità:

P_1	P_2	$P_1 \Rightarrow P_2$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Doppia implicazione:

$P_1 \Leftrightarrow P_2$:

$(P_1 \Rightarrow P_2) \wedge (P_2 \Rightarrow P_1)$

Un altro modo di scrivere l'implicazione è:

$(\neg P_1) \vee (P_2)$ perché le tabelle di verità sono uguali e questo rende le due operazioni equivalenti

Tabella di verità:

P_1	P_2	$\neg P_1 \vee P_2$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

- Una TAUTOLOGIA è un'affermazione sempre vera

⇒ IPOTESI E TESI

L'ipotesi è una proposizione che non si mette in discussione, e partendo da essa si può dimostrare la tesi.

- Dimostrazione PER ASSURDO:

Dato $P_1 \Rightarrow P_2$, ~~supponendo che è vera~~ dimostro che $\neg P_2 \Rightarrow \neg P_1$, dimostro quindi che se P_2 è falso, è negata l'ipotesi

→ TABELLE DI VERITÀ DEI QUANTIFICATORI

- Per dimostrare $\neg(\forall x, P(x))$ basta fare un controesempio:
$\neg(\forall x\, P(x)) \iff \exists x$ t.c. $\neg P(x)$
- Per dimostrare $\neg(\exists x\, P(x))$ bisogna dimostrare che $\forall(x)\ \neg P(x)$.

TEORIA DEGLI INSIEMI

Gli insiemi sono collezioni di oggetti

Si possono descrivere:

- Per elencazione: $A = \{\text{elenco}\}$
- Per proprietà: Es: $A = \{2^x : x \in \mathbb{N}\}$

→ OPERAZIONI TRA INSIEMI

① UGUAGLIANZA: $A = B$: $x \in A \iff x \in B$

② INCLUSIONE: $(A \subseteq B) \iff (x \in A \Rightarrow x \in B)$,
quindi se e solo se ogni oggetto di A è contenuto anche in B.

Una doppia inclusione è un'uguaglianza:

$A = B \iff (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$ (*)

③ NOTAZIONE: ~~Fattoriale~~ Numero degli oggetti contenuti in un insieme. # → numero degli elementi.
(L'insieme vuoto (ϕ) è contenuto in tutti gli insiemi).

$\#\phi = 0 \quad \#\{\phi\} = 1$

(*) PROPRIETÀ:

- Riflessiva: $A \subseteq A$
- Antisimmetrica: Non è sempre vero che $(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$, anzi, è vero se e solo se $A = B$.
- Transitiva: $[(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq D)] \Rightarrow (A \subseteq D)$

Dim: $\forall x \in A,\ x \in B$ e $\forall x \in B,\ x \in D$

quindi $\forall x \in A,\ x \in D$.

→ SOTTOINSIEMI

A è sottoinsieme di B se $A \subseteq B$

- Sottoinsiemi propri: $A \subset B$ $(A \neq B)$
- Sottoinsiemi impropri: $A = B$

→ INSIEME DELLE PARTI

Dato A insieme, è insieme delle parti di A ($\mathcal{P}(A)$), l'insieme dei sottoinsiemi propri e impropri di A.

$\mathcal{P}(A) = \{$ sottoinsiemi di $A\} = \{$ insiemi B t.c. $B \subseteq A\}$

Tra questi sottoinsiemi è escluso $\emptyset$.

Se $\#A = n$, $\#\mathcal{P}(A) = 2^n$

Questo si dimostra ponendo B come sottoinsieme generico di A.

Si indicano gli elementi di B con una stringa: 0 se un elemento vi è contenuto, 1 se non lo è.

Ogni valore può essere 1 o 0, quindi 1 0 ecc, quindi contando le stringhe si ha 2^n.

→ INTERSEZIONE $A \cap B$

Elementi che sono SIA in A che in B: $(x \in A) \wedge (x \in B)$

→ UNIONE $A \cup B$

Elementi che sono in A o in B: $(x \in A) \vee (x \in B)$

→ DIFFERENZA A - B

$A - B = (x \in A) \wedge (x \notin B) = A - (A \cap B)$

master copy

Differenza simmetrica: $A \Delta B$

$(A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$

Dimostrazione:

Sia $x \in (A \cup B) - (A \cap B) \Rightarrow H_p$

Th: $x \in (A - B) \cup (B - A)$

$x \in (A \cup B)$ → $x \in A$ ma non ad $A \cap B$ → $x \notin B$ (x sto in A e non in B) → $A - B$

$x \in (A \cup B)$ → $x \in B$ ma non ad $B \cap A$ → $x \notin A$ (x sto in B e non in A) → $B - A$

$x \in (A - B) \cup (B - A)$

→ PRODOTTO CARTESIANO

$A \times B = \{(a;b) \text{ t.c. } a \in A \text{ e } b \in B\}$

COPPIE ORDINATE

Se $A = B$, allora $A \times A (A^2)$ è composto da coppie ordinate:

$(a_1; a_2) = (a_2; a_1) \iff a_1 = a_2$

Nel prodotto cartesiano si hanno sottoinsiemi del tipo:

$D \times E$ con $D \subseteq A$ e $E \subseteq B$.

Si hanno anche sottoinsiemi definiti da funzioni:

$\{(a, b) \in A \times B \text{ con } b = f(a)\}$

N.B. Se si definisce una funzione in uno spazio "con buchi" costituito da punti (come $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$), anche il grafico della funzione sarà definito per punti.