TEO: Sia $f(x,y)$ una funzione derivabile consideriamo il problema di Cauchy $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) \end{cases}$

Allora: 1) $\exists$ almeno una soluzione locale 2) Se $f(x,y)$ è derivabile in x_0 la sol è unica

3) Se $f(x,y)$ verifica $|f(x,y_1) - f(x,y_2)| < k|y_1 - y_2|$ $\forall x, \forall y_1, y_2$ allora $\exists$ soluzione globale
↳ ipotesi lemma

RICORDA: Equazione differenziale omogenea di ordine 4 $\Rightarrow$ le soluzioni costituiscono uno spazio vettoriale di dimensione = 4

ESPLICITAZIONE COSTANTI $\Leftrightarrow$ IMPORRE CONDIZIONI INIZIALI (Problema di Cauchy)

EQUAZIONI DIFFERENZIALI DI ORDINE K NON OMOGENEE:

$y^{(k)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f(x)$

TEOREMA: Le soluzioni dell'eq. differenziale sono della forma

$y = \bar{y} + c_1 f_1 + \dots + c_k f_k$

$\bar{y}$ ↓ SOLUZ. PARTICOLARE

$c_1 f_1 + \dots + c_k f_k$ = sol equaz. omogenea

$c_1, \dots, c_k$ coefficienti $f_1, \dots, f_k$ base delle soluzioni

Come trovare la soluzione particolare $\bar{y}$:

METODO FUNZIONI SIMILI:

Data eq: $y^{(k)} + \dots + a_0 y = f(x)$

con $f(x) = \begin{cases} e^{Ax} \\ \cos(\beta x), \sin(\beta x) \\ \text{poly} \\ \text{poly} \cdot e^{Ax} \\ \text{poly} \cdot \cos(\beta x) \end{cases}$

cerchiamo come $\bar{y}$ una funzione DELLO STESSO TIPO e applichiamo l'uguaglianza di polinomi

Se $f(x) = x^2 + 1 \Rightarrow \bar{y} = ax^2 + bx + c$

Se $f(x) = \cos(x) \Rightarrow \bar{y} = a\cos(x) + b\sin(x)$

Se $f(x) = (1-x)e^x \Rightarrow \bar{y} = (ax+b)e^{\lambda x}$
↳ questa rimane tale se è già soluzione dell'eq. omogenea

SOL GENERALE:

$y = \bar{y}$ + sol eq omogenea

TEOREMA ②

Data un'equazione diff. a coeff. costanti NON omogenea.
Se $\bar{y}$ è una soluzione particolare dell'equazione allora tutte le soluzioni sono della forma
$y = \bar{y} + \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_m f_m$ dove
$f_1, \dots, f_m$ sono base di soluzione

INTERPRETAZIONE ALGEBRICA:

Sistema lineare $Ax = b$
A matrice $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ vettore incognite
b = vettore termini noti
Soluzioni sistema lineare:
$\bar{x}$ + $\ker(A)$
↓ sol particolare ↘ sol eq. omogenea $\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_m f_m$
Nostro caso: $\bar{y} + \ker(\Gamma)$
↑ sol particolare ↖ $\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_m f_m$

2)

CONCLUSIONE:

$\alpha = \gamma + i\beta$, $\bar{\alpha} = \gamma - i\beta$ } radici di PCAR $\Longleftrightarrow$ $e^{\gamma x}\cos(\beta x)$, $e^{\gamma x}\sin(\beta x)$ SOL DI $F(y)=0$

SOLUZIONE GENERALE: $C_1 e^{\gamma x}\cos(\beta x) + C_2 e^{\gamma x}\sin(\beta x)$

Esempio: $y'' + y = 0$ PCAR: $\lambda^2 + 1 = 0$ RADICI $\alpha = i$, $\bar{\alpha} = -i$ } $\gamma = 0$, $\beta = 1$

BASE DI SOLUZIONI: $e^{\gamma x}\cos(\beta x) = \cos(x)$, $e^{\gamma x}\sin(\beta x) = \sin(x)$

SOLUZIONE GENERALE: $C_1\cos(x) + C_2\sin(x)$

SPIEGAZIONE:

$e^{i\beta x} = \cos(\beta x) + i\sin(\beta x)$

$e^{-i\beta x} = \cos(-\beta x) + i\sin(-\beta x) = \cos(\beta x) - i\sin(\beta x)$

$e^{i\beta x} + e^{-i\beta x} = 2\cos(\beta x)$

$e^{i\beta x} - e^{-i\beta x} = 2i\sin(\beta x)$

} Quindi: combinazione lineare di $e^{i\beta x}, e^{-i\beta x}$ $\updownarrow$ comb. lineare $\cos(\beta x), \sin(\beta x)$

SOL GENERALE: $C_1\cos(x) + C_2\sin(x)$

3) Se α è radice di PCAR con molt. ≥ 2 cioè PCAR: $(\lambda-\alpha)^k \cdot P_1(\lambda)$

$\Rightarrow$ SOLUZIONI: $e^{\alpha x}, x\cdot e^{\alpha x}, x^2 e^{\alpha x}, \dots, x^{k-1} e^{\alpha x}$ k = molteplicità di α

Esempio: $y'' = 0$ PCAR $\lambda^2 = 0$ radice 0 con molt = 2

BASE SOLUZIONI: $e^{0x}, x e^{0x}$

SOLUZIONE GENERALE: $C_1 e^{0x} + C_2 x e^{0x} = C_1 + C_2 x$

Esempio riepilogativo: $F(y) = y^{(4)} - 2y^{(3)} + 2y^{(2)} - 2y' + y = 0$

PCAR $= \lambda^4 - 2\lambda^3 + 2\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$

$(\lambda-1)^2 \cdot (\lambda^2+1)$

RADICI: 1 con molt = 2; i, $-i$ } radici coniugate complesse

BASE DI SOLUZIONI: $e^x, x e^x, \cos(x), \sin(x)$

SOLUZIONE GENERALE: $C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3\cos(x) + C_4\sin(x)$

con C_1, C_2, C_3, C_4 costanti

SOL GENERALE: $y = -\frac{1}{2}\sin(x) + c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x}$

3) $y^{(3)} - y^{(1)} = (3-x)e^{2x}$

$y^{(3)} - y^{(1)} = 0 \quad P(\lambda) = \lambda^3 - \lambda = 0$ radici $0, 1, -1$ molt $= 1$

BASE SOL EQ OMOGENEA: $1, e^x, e^{-x}$

SOL GENERALE EQ OMOGENEA: $c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x}$

Cerchiamo una soluzione particolare del tipo $\bar{y} = (ax+b)\cdot e^{2x}$ ↳ la lascia tale

$\bar{y}' = 2e^{2x}(ax+b) + ae^{2x} = e^{2x}(2ax + 2b + a)$

$\bar{y}'' = 2e^{2x}(2ax + 2b + a) + e^{2x}(2a) = e^{2x}(4ax + 4b + 4a)$

$\bar{y}''' = 2e^{2x}(4ax + 4b + 4a) + e^{2x}(4a) = e^{2x}(8ax + 8b + 8a + 4a) = e^{2x}(8ax + 12a + 8b)$

Sostituiamo:

$e^{2x}(8ax + 12a + 8b) - e^{2x}(2ax + 2b + a) = (3-x)e^{2x}$

$e^{2x}(6ax + 11a + 6b) = (3-x)e^{2x}$

$\begin{cases} 6a = -1 \\ 11a + 6b = 3 \end{cases}$; $\begin{cases} a = -1/6 \\ \frac{-11}{6} + 6b = 3 \rightarrow b = \frac{3 + \frac{11}{6}}{6} \rightarrow b = \frac{29}{36} \end{cases}$ $\begin{cases} a = -1/6 \\ b = 29/36 \end{cases}$

SOLUZIONE GENERALE DELL'EQUAZIONE:

$y = \left(-\frac{1}{6}x + \frac{29}{36}\right)e^{2x} + c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x}$

Problema di Cauchy:

$\begin{cases} y^{(3)} + 4y^{(1)} = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \\ y^{(2)}(0) = -8 \end{cases}$

$\lambda^3 + 4\lambda = 0$

$\lambda(\lambda^2 + 4)$

$\lambda = 0$ con molt $= 1$

$\lambda = \pm\sqrt{-4} = \pm 2\sqrt{-1}$ ← $-2i$, $+2i$

BASE DI SOLUZIONI: $\lambda = \pm 2i \rightarrow \cos(2x), \sin(2x)$

$\lambda = 0 \rightarrow e^0 = 1$

SOL GENERALE: $c_1 + c_2\cos(2x) + c_3\sin(2x) = y$

$y(0)$: $c_1 + c_2 = 1 \rightarrow c_1 = -1$

$y'(0)$: $2c_3 = 2 \rightarrow c_3 = 1$

$y^{(2)}$: $-4c_2 = -8 \rightarrow c_2 = 2$

$y = -1 + 2\cos(2x) + \sin(2x)$

In generale: Se $a=2$ con molt. $=3$ $\Rightarrow$ sol $e^{2x}, x\cdot e^{2x}, x^2 e^{2x}$

Se $a=\pm 2i$ radice con molt $=2$ $\Rightarrow$ SOL $\cos(2x), \sin(2x), x\cos(2x), x\sin(2x)$

① $y'' + 3y' + 2y = x^2+1$

$f(x) = x^2+1$

Equat. omogenea: $y''+3y'+2y=0$

$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$

$\lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2}$ → -1 $\lambda_1 = -1$ con molt 1; -2 $\lambda_2 = -2$ con molt 1

BASE DI SOLU: e^{-x}, e^{-2x}

SOLU. GENERALE: $c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$

Per determinare $\bar{y}$ (soluzione generale) cerchiamo un polinomio di grado 2

$\bar{y} = ax^2 + bx + c$

$\bar{y}' = 2ax + b$

$\bar{y}'' = 2a$

$2a + 6ax + 3b + 2ax^2 + 2bx + 2c = x^2 + 0x + 1$

$x^2(2a) + x(6a+2b) + 2a + 3b + 2c = x^2 + 0x + 1$

$\begin{cases} 2a = 1 \\ 6a + 2b = 0 \\ 2a + 3b + 2c = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 1/2 \\ 3 + 2b = 0 \rightarrow b = -3/2 \\ c = 1 - 1 + \frac{9}{4} \end{cases}$

SOLU. PARTICOLARE:

$\bar{y} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}$

CONCLUSIONE: $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{4} + c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$

② $y^{(3)} - y^{(1)} = \cos(x)$

Equat. omogenea: $y^{(3)} - y^{(1)} = 0$ $\quad \lambda^3 - \lambda = 0$, $\lambda(\lambda^2 - 1)$ radici $0, 1, -1$ con molt 1

SOLU GENERALE EQUAZ. OMOGENEA: $c_1 e^0 + c_2 e^x + c_3 e^{-x}$

SOLUZIONE PARTICOLARE: cerchiamo $\bar{y}$ della forma $\bar{y} = a\cos(x) + b\sin(x)$

$\bar{y}' = -a\sin(x) + b\cos(x)$

$\bar{y}'' = -a\cos(x) - b\sin(x)$

$\bar{y}''' = a\sin(x) - b\cos(x)$

$a\sin(x) - b\cos(x) + a\sin(x) - b\cos(x) = \cos(x) + 0\sin(x)$

$2a\sin(x) - 2b\cos(x) = \cos(x) + 0\sin(x)$

$\begin{cases} 2a = 0 \\ -2b = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases}$ $\quad \bar{y} = -\frac{1}{2}\sin(x)$

Esempio: $P_{car}: (\lambda-5)(\lambda+3) = \lambda^2 - 2\lambda - 15$

Eq. diff. associata: $y'' - 2y' - 15y = 0 \Rightarrow (y' - 5y) \circ (y' + 3y) = 0$

SOLUZIONI: SOL + SOL (A) (B)

(A) $y' - 5y = 0 \iff y_1 = e^{5x}$ base soluz. di (A)

(B) $y' + 3y = 0 \iff y_2 = e^{-3x}$ base soluz. di (B)

Quindi $y'' - 2y' + 5y = 0 \longleftrightarrow (y' - 5\,id) \circ (y' + 3\,id) = 0$

$\Updownarrow$

$(y' - 5y = 0) + (y' + 3y = 0)$

Conclusione: SOLUZIONE generale dell'eq. $y'' - 2y' - 15y = 0$ è $c_1 e^{5x} + c_2 e^{-3x}$

c_1, c_2 costanti

Riassumendo: 5, -3 RADICI di $P_{CAR} \Rightarrow e^{5x}, e^{-3x}$ BASE SOLUZIONI

TEOREMA: Sia $F(y)=0$ eq diff. a coeff costanti omogenea

P_{CAR} = polinomio caratteristico associato

Se α è radice di P_{CAR} allora: $e^{\alpha x}$ è base di soluzione dell'eq. diff $F(y)=0$

Pb P_{CAR} è pol. a coeff in $\mathbb{R}$

dobbiamo distinguere i seguenti casi:

1) P_{CAR} ha radici reali distinte
2) P_{CAR} ha radici reali e complesse
3) P_{CAR} ha radici multiple (con molteplicità > 1)

Spiegazioni:

1) $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ radici reali di $P_{CAR} \Rightarrow e^{\alpha_1 x}, \dots, e^{\alpha_k x}$ sono BASI DI SOLUZIONI
2) Se $\alpha = \gamma + i\beta \in \mathbb{C}$ radice complessa di P_{CAR} allora poiché P_{CAR} ha coeff reali $\Rightarrow$ anche $\bar{\alpha} = \gamma - i\beta$ è radice complessa di P_{CAR} $e^{(\gamma+i\beta)x}, e^{(\gamma-i\beta)x}$ sono soluzioni a valori in $\mathbb{C}$

Ma $e^{i\beta x} \overset{def}{=} \cos(\beta x) + i \operatorname{sen}(\beta x)$

$e^{-i\beta x} \overset{def}{=} \cos(-\beta x) + i \operatorname{sen}(-\beta x)$

Quindi possiamo scegliere come base delle soluzioni:

$e^{\gamma x}\cos(\beta(x))$, $e^{\gamma x} \cdot \operatorname{sen}(\beta(x))$