master COPY

TEORIA

master COPY

master COPY

master COPY

INSIEMI

DEF (Maggiorante): Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, un elemento $x \in \mathbb{R}$ si dice MAGGIORANTE di A se $x \geq a \ \forall a \in A$

DEF (Minorante): Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, un elemento $x \in \mathbb{R}$ si dice MINORANTE di A se $x \leq a \ \forall a \in A$

Allora:
1. Un insieme che ammette almeno un maggiorante o un minorante è LIMITATO
2. Un insieme che NON AMMETTE né minorante né maggiorante è ILLIMITATO
3. Se NON ha minorante è ILLIMITATO a SX
4. Se NON ha maggiorante è ILLIMITATO a dx

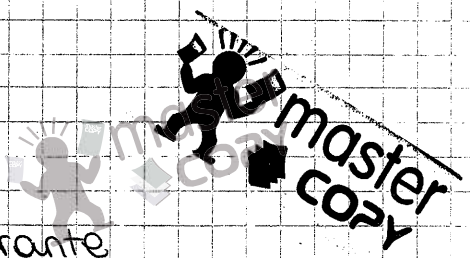
DEF (estremo superiore): Sia A un insieme limitato a dx o limitato superiormente allora l'ESTREMO SUPERIORE di $A = \sup(A)$ è il più piccolo tra i maggioranti di A.

DEF (estremo inferiore): Sia A un insieme limitato inferiormente allora l'ESTREMO INFERIORE di $A = \inf(A)$ è il più grande tra i minoranti di A

Allora:
1. Se A non ammette maggioranti è ILLIMITATO SUPERIORMENTE e $\sup(A) = +\infty$
2. Se A non ammette minoranti è ILLIMITATO INFERIORMENTE e $\inf(A) = -\infty$
3. Se $\sup(A) \in A$ allora si dice $\max(A) = \sup(A)$
4. Se $\inf(A) \in A$ allora si dice $\min(A) = \inf(A)$

ESEMPIO

$$A = \left\{ \frac{1}{n!} \ n \in \mathbb{N} - \{0\} \right\} \subseteq \mathbb{R}$$



- Limitato inferiormente: 0 minorante
- Limitato superiormente: 1 maggiorante

OSS: $1 \in A \Rightarrow \sup(A) = \max(A) = 1$

$\inf(A) = 0 \quad \not\exists \ \min(A)$

FUNZIONI

DEF: Siano A e B due insiemi. $f: A \to B$, si dice funzione se ad ogni elemento di $a \in A$ associa un unico elemento di $b \in B$

f è la funzione

A è il Dominio

B è il codominio.

$\Rightarrow$ Immagine di f $= f(A) = \{ b \in B \text{ t.c. } \exists a \in A \text{ con } f(a) = b \}$

master COPY

ESEMPIO

- $A = \{$ Distributori di benzina $\}$ $\quad B = \{$ Prezzi della benzina $\}$

  $f(a) = b \rightarrow$ Se dal benzinaio "a" la benzina costa "b"

  $\{$ Prezzi $\} \xrightarrow{f} \{$ Benzina $\}$

f NON è in generale una funzione, perché non si associa un solo elemento

- $A = \{$ studenti $\}$ $\quad B = \{$ voto esami analisi $\}$

  $\{$ Studenti $\} \xrightarrow{f} \{$ voto esami analisi $\}$

f È una funzione perché ad ogni elemento di A associa un solo elemento di B.

DEF: $f: A \to B$

① f INIETTIVA: $f(a_1) = f(a_2) \iff a_1 = a_2$

② f SURGETTIVA: $\forall b \in B \ \exists a \in A$ t.c. $f(a) = b$

③ f BIUNIVOCA: $\iff$ È INIETTIVA E SURGETTIVA
$\iff \forall b \in B \ \exists! a \in A$ t.c. $f(a) = b$

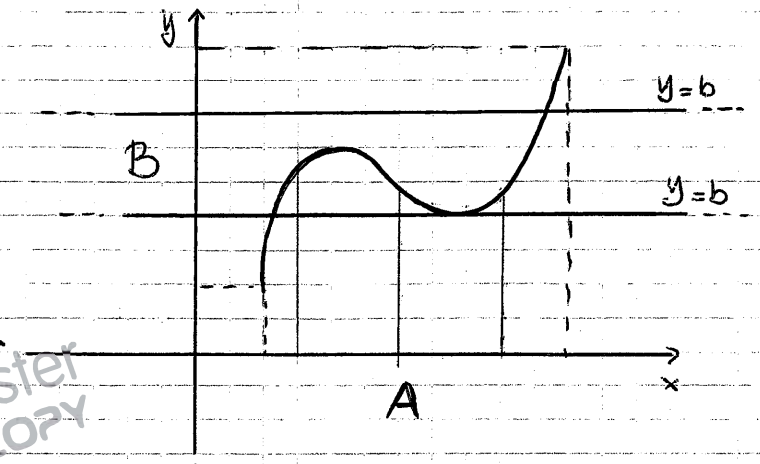
④ f MONOTONA CRESCENTE: Se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
$<$ è MONOTONA STRETTAMENTE CRESCENTE

⑤ f MONOTONA DECRESCENTE: Se $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$
$>$ è MONOTONA STRETTAMENTE DECRESCENTE

* INTERPRETAZIONE GRAFICA

$f: A \to B \quad A, B \subseteq \mathbb{R}$

$G(f) = A \times B$ ↳ grafico della funzione



$y = f(x)$

INIETTIVA: Se ogni retta $y=b \in B$ incontra il grafico in al massimo in un punto

SURGETTIVA: Se ogni retta $y=b \in B$ incontra il grafico in almeno un punto

BIUNIVOCA: Se ogni retta $y=b \in B$ incontra il grafico in un solo punto

FUNZIONE CONTINUA:

- $f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ punto di accumulazione per A allora f si dice CONTINUA in x_0 $\iff \exists \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
- f si dice CONTINUA se lo è in ogni punto del suo dominio.

TEOREMI

① DEGLI ZERI: f continua in $[a;b]$ t.c. $f(a)f(b) \leq 0$, allora $\exists c \in [a;b]$ t.c. $f(c)=0$

DIM: Se $f(a) = f(b) = 0$ allora $a=c$ e $b=c$

Supponiamo $f(a)<0$ e $f(b)>0$

$f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ $\begin{cases} =0 & \text{FINE} \\ >0 & \text{ipotesi valide } \left[a; \frac{a+b}{2}\right] \\ <0 & \text{ipotesi valide } \left[b; \frac{a+b}{2}\right] \end{cases}$

Dopo il I° passo $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$ ho trovato c.

Se $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \neq 0$ ho trovato $[a_1; b_1] \subset [a;b]$ $(a_1 \geq a;\ b_1 \leq b)$ t.c. $b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$ e ancora $f(a_1)f(b_1) < 0$