INSIEMI

$A = \{a_1, \dots, a_n\}$ $\quad B \to (b_1, \dots, b_n)$

$b_1 = \begin{cases} 0 \text{ se } a_1 \notin B \\ 1 \text{ se } a_1 \in A \end{cases}$

$b_2 = \begin{cases} 0 \text{ se } a_2 \notin B \\ 1 \text{ se } a_2 \in B \end{cases}$

$\mathcal{P}(A)$ $\quad (1,1,0,0,\dots,1)$

CORRISPONDENZA BIUNIVOCA

Sottoinsiemi di $A \longleftrightarrow$ Stringhe

$\emptyset \longrightarrow (0,0,0,\dots,0)$

$A \longrightarrow (1,1,1,\dots,1)$

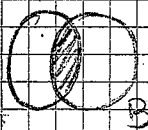
A ogni sottoinsieme corrisponde una e una sola stringa

Numero totale di elementi della stringa $\Rightarrow 2^n$

$\mathcal{P}(A) = 2^n$

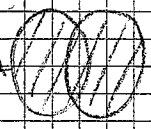
Per ogni elemento posso compiere due scelte $(0,1)$ per ottenere una stringa di lunghezza n

OPERAZIONI TRA INSIEMI

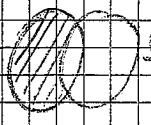


INTERSEZIONE $\to A \cap B = (x \in A) \wedge (x \in B)$

UNIONE $\to A \cup B = (x \in A) \vee (x \in B)$



DIFFERENZA $\to A - B = (x \in A) \wedge (x \notin B)$



$= A - (A \cap B)$

DIFFERENZA SIMMETRICA $\to A \triangle B = (A-B) \cup (B-A)$



$= (A \cup B) - (A \cap B)$

Dim

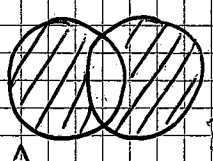
Sia $x \in (A \cup B) - (A \cap B)$ $\quad$ Ip

Voglio dimostrare $x \in (A-B) \cup (B-A)$ $\quad$ Th

$x \in A \cup B$ $\begin{cases} x \in A \text{ ma } x \notin A \cap B \Rightarrow x \notin B \text{ cioè } x \in A-B \\ x \in B \text{ ma } x \notin A \cap B \Rightarrow x \notin A \text{ cioè } x \in B-A \end{cases}$

$\Downarrow$

$x \in (A-B) \cup (B-A)$



master copy

Esempio

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ pari}\}$

$B = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 \text{ divide } x\}$

$A \cap B = \{0, 6, 12 \ldots\} = \{x \in \mathbb{N} \mid 6 \text{ divide } x\} = mcm$

$A \cup B = \{0, 2, 3, 4, 6, 8, 9 \ldots\} = \{2n, 3m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$

$A - B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ pari e } 6 \text{ non divide } x\}$

master COPY

PRODOTTO CARTESIANO

A, B insiemi

$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$ coppie ordinate

Se $A = B$ $\quad A^2 = A \times A$ composto da coppie ordinate

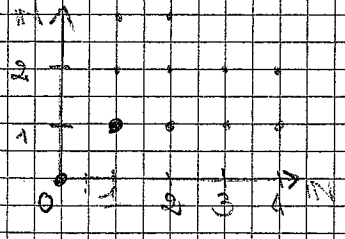
$(a_1, a_2) = (a_2, a_1) \iff a_1 = a_2$

Nel prodotto cartesiano abbiamo sottoinsiemi del tipo $D \times E$ $\quad D \subseteq A$ e $E \subseteq B$

Noi considereremo soprattutto grafici di funzioni $\{(a,b) \in A \times B$ con $b = f(a)\}$

Definiamo $\forall n \in \mathbb{N} \mid f(n) = n^2$

$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \Rightarrow$ grafico di $f(n)$



$f(0) = 0$ $\quad f(2) = 4$

$f(1) = 1$ $\quad f(3) = 9$

master COPY

Insiemi numerici

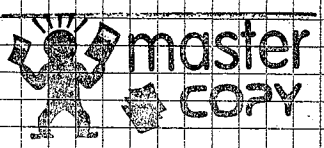
$\mathbb{N}$ NATURALI (interi positivi)

$\mathbb{Z}$ INTERI (interi pos e neg)

$\mathbb{Q}$ RAZIONALI (frazioni)

$\mathbb{R}$ REALI

$\mathbb{C}$ COMPLESSI



Operazioni in $\mathbb{N}$: somma $\rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$

prodotto $\rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$

Verificano alcune proprietà: ASSOCIATIVA: $(a+b)+c = (a+c)+b$

COMMUTATIVA: $a+b = b+a$

DISTRIBUTIVA: $a(b+c) = ab+ac$

ESISTENZA ELEMENTO NEUTRO: 0 x la somma $a+0=a$

1 x prodotto $a \cdot 1 = a$

Assiomi che definiscono l'insieme.

$a \cdot 0 = 0$ non può essere dimostrato in $\mathbb{N}$

$\mathbb{N}$ ammette un ordinamento totale. Cioè c'è una relazione di ordine $\leq$ t.c. $a \leq a \quad \forall a \in \mathbb{N} \longrightarrow$ RIFLESSIVA

$a \leq b$ e $b \leq a \Leftrightarrow a = b \longrightarrow$ ANTISIMMETRICA

$a \leq b$ e $b \leq c \Rightarrow a \leq c \longrightarrow$ TRANSITIVA

Def di ordinamento?

Def. di ordinamento totale: $\forall a, b \in \mathbb{N}$ si ha $a \leq b$ o $b \leq a$

Da queste segue il PRINCIPIO DEL BUON ORDINAMENTO

Ogni ~~insieme~~ sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{N}$ ammette un minimo (minore o uguale a tutti gli elem dell'insieme)

(Principio solo dell'insieme $\mathbb{N}$)

PRINCIPIO DI INDUZIONE

Sia $A \subseteq \mathbb{N}$ t.c.

① $m \in A$

② se $n \geq m \in A \Rightarrow n+1 \in A$

$\Rightarrow A \supseteq \{ x \in \mathbb{N} \mid x \geq m \}$

Dim. che $\overset{hp}{\text{BO}} \Rightarrow \overset{Th}{\text{Induzione}}$ (dim per assurdo)

Buon ordinamento — implica induzione

Supponiamo che $\exists\, t \geq m \mid t \notin A$, per ① deve essere $t > m$

$B = \{ x \geq m \mid x \notin A \} \neq \emptyset$. se non è vuoto avrà un minimo

Allora. $\boxed{\exists\, \lambda \in B}$ minimo di B

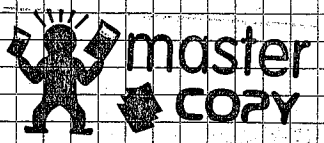
$\lambda - 1 < \lambda \Rightarrow \lambda - 1 \notin B$ [perché λ è minimo di B]

$\lambda - 1 \geq m$ ← $\lambda \in B \Rightarrow \lambda \geq m$

$m \in A \overset{①}{\Rightarrow} \lambda > m$

Per ②: $\lambda - 1 \in A \overset{②}{\Rightarrow} \boxed{\lambda \in A}$ (*)

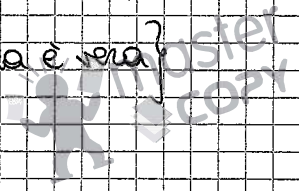
Contraddizione perché abbiamo trovato un elem (*) che sta in B e A ma per hp non deve stare in entrambi



Esercizi sul principio di induzione

$1+2+3+\ldots+n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$A = \{$insieme degli $n \in \mathbb{N}$ per cui la formula è vera$\}$



Voglio dimostrare che $A = \mathbb{N}$

$n = 0$ la formula $0 = 0$ $\quad 0 \in A$

$n = 1$ " " $1 = 1$ $\quad 1 \in A$

Dimostro che formula vera per $n \geq 1 \Rightarrow$ formula vera anche per $n+1$

$\underbrace{1+2+3+\ldots+n}_{\text{per ipotesi formula vera per } n} + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$

$$\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} \qquad n+1 \in A$$

Esercizio PI

$A \subseteq \mathbb{N}$ t.c. ① $m \in A$

② $\forall n \geq m$, $n \in A \Rightarrow n+1 \in A$

Allora $A \supseteq \{n \in \mathbb{N},\ n \geq m\}$

Se voglio dimostrare che $P(n)$ è vero $\forall n \in \mathbb{N}$: $A = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n) \text{ è vero}\}$ (Th)

- Dimostro $0 \in A$
- Dimostro $P(n)$ vera per $n \in A \Rightarrow P(n+1)$ vera per $n+1 \in A$

Esempio

$\forall n \geq 0 \quad \sum_{i=0}^{n} (2i+1) = (n+1)^2 \qquad P(n)$

$P(0)$ è vera? $\sum_{i=0}^{0} (2i+1) = (1) = (0+1)^2 = (1) \Rightarrow P(0)$ è VERA

Supponiamo $P(n)$ vera, cioè $\sum_{i=0}^{n} (2i+1) = (n+1)^2$

Verifichiamo $P(n+1)$

$$\sum_{i=0}^{n+1} (2i+1) = \underbrace{\sum_{i=0}^{n} (2i+1)}_{(n+1)^2} + (2(n+1)+1) = (n+1)^2 + 2n + 2 + 1 =$$

$$= n^2 + 2n + 1 + 2n + 3 = n^2 + 4n + 4 = \boxed{(n+2)^2} \Rightarrow P(n+1) \text{ VERA}$$

Esempio $\forall n \geq 0$

$\sum_{i=0}^{n} 2^{-i} = 2 - 2^{-n} \qquad P(n)$

$P(0)$ vera? $\sum_{i=0}^{0} 2^{-i} = 2^{-0} = (1) \qquad 2 - 2^{-0} = (1) \quad P(0)$ VERA

Suppongo $P(n)$ vera e controlliamo $P(n+1)$

$$\sum_{i=0}^{n+1} 2^{-i} = \sum_{i=0}^{n} 2^{-i} + 2^{-(n+1)} = 2 - 2^{-n} + \left(2^{-(n+1)}\right) = 2 - 2^{-n}\left(1 - 2^{-1}\right) =$$

$$= 2 - 2^{-n-1} = 2 - 2^{-(n+1)} \qquad \text{VERA}$$