Libri → VALUTAMI Sito Amobrea Bonolini → MATERIALE

Confrontare le SOLUZIONI

Saper MOTIVARE le soluzioni

- 2 compitini durante l'anno, fine Tra Gennaio e Febbraio → fino ai limiti e limiti di SUCCESSIONI
  fine 1° SEMESTRE
  fine 2° SEMESTRE → LIMITE, INTEGRALE, SERIE, FUNZIONE
  Le 3 zone SICURI di compitini

Lezione Analisi I 28/09/2020

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ naturali → Induzione / Buon ordinamento

$\mathbb{Z} = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$ interi → discreto

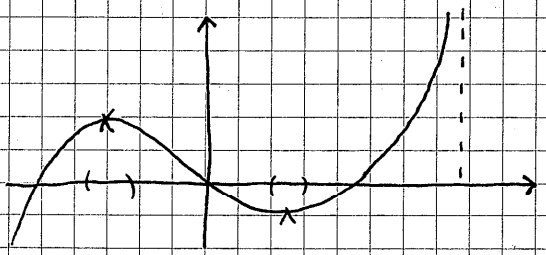
$\mathbb{Q}$ razionali → densi

$\mathbb{R}$ reali → completo m $\mathbb{C}$ → Algebra lineare

- LIMITE → Studio qualitativo delle funzioni
  → Derivate max min
  → Integrali
  → Serie / successioni

STUDIO QUALITATIVO FUNZIONI → ci permette di fare previsioni sul fenomeno anche senza DATI precisi

Quantità materiale x
Energia sprigionata y



- FUNZIONI potenza X^n → polinomi
  trigonometriche → sen, cos, tg ⇝ inverse arctg
  esp / log → e^x $\log(x)$ 2^x

PRELIMINARI (pre-requisiti) equazioni / disequazioni, aritmetica elementare
aritmetica tra polinomi → Teorema di Ruffini
divisione tra polinomi

master COPY

Elementi di LOGICA

Affermazioni / Proposizioni "decidibili e oggettive"

"Nella Divina Commedia ci sono 16 vocali" F × obiettivo

" " 2^{200} vocali" F × eccesso

" " un numero pari di vocali" // decidibile e oggettiva

Proposizioni = Affermazioni con valore V o F

Predicati = Affermazioni dipendenti da uno o più parametri

Dove si premono i parametri

V o F dipendono dal valore del parametro

$X^2 > 32$ $X \in \mathbb{N}$ $x=2$ F $x=7$ V

Predicato + valore del parametro → PROPOSIZIONE

valori dei parametri

$P(x, y)$ Il docente x promuove lo studente y

$P(x, y, z, w, \dots)$ Il docente x, della materia y, nell'A.A., promuove lo studente z, con il voto v

Per stabilire se è vera o falsa ho bisogno di un valore per ciascun parametro

QUANTIFICATORI

$\forall$ per ogni

$\exists$ esiste

$\exists!$ esiste ed è unico

- $X^2 > 32$
- $\forall x \in \mathbb{N}\ x^2 > 32$ F
- $\exists x \in \mathbb{N}\ x^2 > 32$ V
- $\exists! x \in \mathbb{N}\ x^2 > 32$ F

Il docente x boccia lo studente y D docenti S studenti

$P(x; y)$

$\exists x \in D\ \forall y \in S\ P(x; y)$ "è vera"

C'è un docente che boccia ogni studente

$\forall x \in D\ \forall y \in S\ P(x, y) \dots$ Completare

$\exists! x \in D\ \forall y \in S\ P(x, y) \dots$

→ Tutti i docenti bocciano ogni studente.

→ Esiste un solo docente che boccia tutti gli studenti.

OPERAZIONI TRA PROPOSIZIONI

TABELLA o TAVOLA DI VERITÀ

- **Negazione** $\neg P$

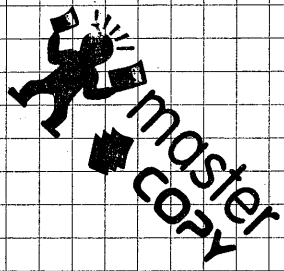
P	$\neg P$
V	F
F	V

- **Congiunzione** $\wedge$ $\quad P_1 \wedge P_2$

È vera se e solo se entrambe le proposizioni sono vere

Due proposizioni

P_1	P_2	$P_1 \wedge P_2$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F



- **Disgiunzione** $\vee$ $\quad P_1 \vee P_2$

È vera quando è vera almeno una delle due proposizioni

P_1	P_2	$P_2 \vee P_1$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Attenzione: P_1 o P_2 sono vere entrambe è accettabile perché usiamo O NON ESCLUSIVA

Esempio: "Oggi vi siete collegati a questa lezione o avete pensato ai fatti vostri" (V) Per noi possono essere VERE entrambe

- **Implicazione** $P_1 \Rightarrow P_2$ (CONDIZIONE SUFFICIENTE)

P_1 vera implica P_2 vera

Definizione di "$P_1 \Rightarrow P_2$" ⟶
Se P_1 è vera allora P_2 è vera

Traduzione: $P_1 \Rightarrow P_2$ è falsa solo quando P_1 è vera e P_2 è falsa, equivale a $\neg(P_1 \wedge \neg P_2)$

P_1	P_2	$P_1 \Rightarrow P_2$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

$P_1 \wedge \neg P_2$	$\neg(P_1 \wedge \neg P_2)$
F	V
V	F
F	V
F	V

⟵ Riprendendo questi casi

Definizione: Due proposizioni sono equivalenti se e solo se hanno la stessa tabella di verità.

Una TAUTOLOGIA è una proposizione sempre vera.

Esempio di TAUTOLOGIA: $P \vee \neg P$ Almeno una è sempre vera quindi $P \vee \neg P$ sempre vera

P	$\neg P$	$P \vee \neg P$
V	F	V
F	V	V

Sempre VERA!

$P_1 \Longrightarrow P_2$ tradotta $\neg(P_1 \wedge \neg P_2)$

non è possibile che P_1 vera e P_2 falsa

È vero che almeno una tra P_1 e P_2 falsa

Almeno una tra non P_1 e P_2 è vera

$\neg P_1 \vee P_2$ (equivalente a $P_1 \Rightarrow P_2$)

OSSERVAZIONE

$\neg(P_1 \wedge \neg P_2)$ equivale a $\neg P_1 \vee P_2$

$\neg \wedge \vee$

master copy

- Doppia Implicazione $P_1 \Longleftrightarrow P_2$

equivale a $(P_1 \Rightarrow P_2) \wedge (P_2 \Rightarrow P_1)$

P_1	P_2	$P_1 \Longleftrightarrow P_2$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Mia simbolizzazione

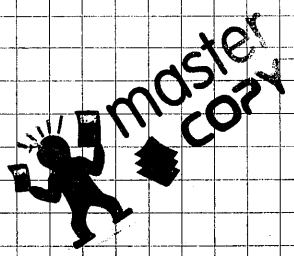
C. SUFFICIENTE E NECESSARIA: $P_1 \Longleftrightarrow P_2$

P_1	P_2	C. SUFFICIENTE $P_1 \Rightarrow P_2$	C. NECESSARIA $P_2 \Rightarrow P_1$	$(P_1 \Rightarrow P_2) \wedge (P_2 \Rightarrow P_1)$
V	V	V	V	V
F	V	V	F	F
V	F	F	V	F
F	F	V	V	V

Dimostrazione (MODUS PONENS)

$(P_1 \wedge (P_1 \Rightarrow P_2)) \Rightarrow P_2$

Se P_1 vera e $P_1 \Rightarrow P_2$ vera allora P_2 vera



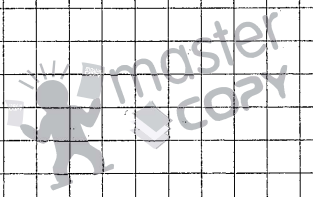
Esempio

P_1 2 è in pari

P_2 Somma di due numeri pari è pari

IPOTESI: $[(P_1 \wedge P_2) \wedge ((P_2 \wedge P_1) \Rightarrow P_3)] \Rightarrow P_3$

TESI $n+2$ è pari P_3



OSSERVAZIONE

- le ipotesi non si mettono mai in discussione
- $P_1 \Rightarrow P_2$ P_1 è condizione SUFFICIENTE per P_2 (Non è NECESSARIO)

Esempio: Chi studia sempre passa l'esame (IPOTESI che prendo per buona)

$P_1 \Rightarrow P_2$

studio sempre — passo l'esame

(TESI da dimostrare)

1. Francesco studia sempre quindi passa l'esame V
2. Francesco studia sempre e boccia F
3. Francesco studia poco e passa l'esame ?) V (CONDIZIONE SUFFICIENTE)

$\neg P_1 \qquad P_2$

$(P_1 \Rightarrow P_2) \Rightarrow (\neg P_1 \wedge P_2)$ F

↳ P_1 FALSA $\wedge$ P_2 VERA

$(P_1 \Rightarrow P_2)$ IPOTESI ⇒ TESI: $\neg P_1 \wedge P_2$?

4. Francesco studia poco quindi boccia

$(P_1 \Rightarrow P_2) \Rightarrow (\neg P_1 \Rightarrow \neg P_2)$ F

Cambiamolo l'ipotesi: Solo chi studia sempre passa l'esame

$P_1 \Leftarrow P_2$

P_1 è condizione necessaria per P_2

Condizione SUFFICIENTE e NECESSARIA $\Leftrightarrow$

(CONDIZIONE NECESSARIA)

ESERCIZIO

1. Riscrivere le 4 affermazioni prendendole come ipotesi

$P_2 \Rightarrow P_1$ oppure $P_2 \Leftarrow P_1$

2. Provare a farlo scrivendo le tabelle di verità

$P_2 \Rightarrow P_1$

1. Solo chi studia passa l'esame 1 V 2 V 3 F 4 V

$P_2 \Leftrightarrow P_1$

Se e solo si studia si passa l'esame 1 V 2 F 3 F 4 V

2.

P_1	P_2	$\neg P_1$	$\neg P_2$	$P_1 \Rightarrow P_2$	$P_2 \Rightarrow P_1$	$P_2 \Leftrightarrow P_1$
V	V	F	F	V	V	V
V	F	F	V	F	V	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V	V

master copy