Teoremi con dimostrazioni di Meccanica Razionale

1 Proprietà delle derivata di un vettore
2 Lunghezza di un arco di curva
3 Formule di Frenet Serret
4 Momento di un vettore rispetto ad una retta orientata
5 Teorema di Varignon
6 Formula di Cambiamento del Polo
7 Invariante della componente del momento Asse luce $\vec{R}$
8 Invariante scalare
9 Asse Centrale
10 Sistemi di vettori Equivalenti
11 Teoremi sull'equivalenza
12 Centro di un sistema di vettori Paralleli
13 Velocità Areolare
14 Teorema di Binet
15 Teorema di Composizione delle velocità
16 Teorema di Composizione delle accelerazioni
17 Formula Fondamentale della Cinematica rigida Piana
18 Teorema di Rivals nel Piano
19 Centro delle Velocità
20 Determinazione geometrica del Cv; Teorema di Chasles
21 Centro Istantaneo di Rotazione; Polari fissa e Mobile
22 Teorema Fondamentale sulle Polari
23 Profili Coniugati
24 Formule di Poisson
25 Formula Fondamentale della cinematica rigida in 3D
26 Proprietà di $\underline{\omega}$
27 Teorema di Rivals in 3D
28 Calcolo della Velocità di trascinamento usando $\underline{\omega}$
29 Calcolo dell'accelerazione di Coriolis usando $\underline{\omega}$
30 Calcolo dell'accelerazione di trascinamento usando $\underline{\omega}$
31 Asse di Mozzi
32 Teorema di Mozzi
33 Teorema di Composizione delle velocità angolari.

master COPY COPISTERIA

34 Relazione tra le derivate di un vettore libero in due terne diverse

35 Angoli di Eulero

36 Momento d'inerzia di un Punto materiale rispetto ad una retta.

37 Momento d'inerzia di un sistema di Punti rispetto ad una retta

38 Momento d'inerzia di un Sistema continuo rispetto ad una retta

39 Teorema di Steiner o degli ASSI Paralleli

40 Momento d'inerzia rispetto ad una retta di una stella

41 Ellissoide d'inerzia

42 Momento Polare risultante della quantità di moto

43 Teorema di KÖing

44 Spostamento Virtuale per Vincoli indipendenti dal tempo

45 Spostamento Virtuale per Vincoli dipendenti dal tempo

46 Spostamento Virtuale per sistemi con 1 DOF

47 Spostamento Virtuale Per Sistemi con numero di DOF Variabile nel Tempo

48 Spostamento Virtuale Per Punti rigidamente collegati tra loro

49 Spostamento Virtuale Per Vincoli di Rotolamento

50 LAVORO VIRTUALE

51 Principio dei Lavori Virtuali (in Statica)

52 Teorema di Torricelli

53 Prima equazione cardinale della Statica

54 Seconda equazione Cardinale della Statica

55 Dimostrazione dell'equivalenza PLV-ECS Per un Singolo Corpo rigido

56 Forze d'inerzia

57 Prima equazione cardinale della dinamica

58 Seconda equazione cardinale della dinamica

59 Leggi di Conservazione in dinamica dei Sistemi

60 Moto di R attorno ad un Punto fisso: Equazioni di Eulero

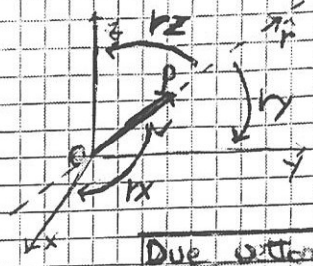
61 PLV in dinamica

62 Equazioni di Lagrange
63 Teorema dell'energia cinetica per un corpo rigido
64 Equilibrio di sistemi meccanici: Criterio di Dirichlet.

master COPY COPISTERIA

1 Proprietà dei vettori e delle loro derivate

È possibile calcolare le componenti di un vettore lungo gli assi di una terna x, y, z



$\hat{r}_x, \hat{r}_y \hat{r}_z$ sono gli angoli tra la retta r direzione di $\vec{V}$ e gli assi cartesiani definisco i coseni direttori:

$$\begin{cases} \alpha = \cos(\hat{rx}) \\ \beta = \cos(\hat{ry}) \\ \gamma = \cos(\hat{rz}) \end{cases}$$

con $-1 \le \alpha \le 1$
$-1 \le \beta \le 1$
$-1 \le \gamma \le 1$

Due vettori si dicono equipollenti se hanno lo stesso modulo, direzione e verso, ma origini diverse. L'insieme dei vettori equipollenti ad un segmento orientato dato è detto Vettore Libero. I vettori applicati di cui fanno parte hanno una origine definita e non fisso spesso dove posizionarlo

Perciò posso scrivere le componenti di V (ovvero le proiezioni sugli assi) come:

$$V_x = \alpha |V|$$
$$V_y = \beta |V|$$
$$V_z = \gamma |V|$$

$$\alpha = \frac{V_x}{|V|}$$

$$\beta = \frac{V_y}{|V|}$$

$$\gamma = \frac{V_z}{|V|}$$

* Il coseno è una funzione pari il segno dell'angolo è ininfluente

* Se $\hat{V}$ è un versore allora le sue componenti V_x, V_y, V_z sono proprio i coseni direttori α, β, γ

Prodotto di uno scalare per un vettore

dato uno scalare m e un vettore $\vec{V}$ si definisce $\vec{u} = m\vec{V}$. $\vec{u}$ ha stessa direzione di $\vec{V}$, $|U| = |m||V||$ e il verso di $\vec{u}$ è lo stesso di $\vec{V}$ se m è positivo, è l'opposto se m è negativo.

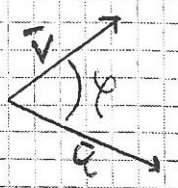
Prodotto Scalare

- da come risultato un numero

dati due vettori u e V si definisce Prodotto scalare

$$\vec{u} \cdot \vec{V} = |u||V|\cos(\varphi)$$

Se $\varphi = 90 \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{V} = 0$



dati $\vec{U}$ e $\vec{V}$ se si definiscono
$\vec{W} = \vec{U} + \vec{V}$
$\vec{Z} = \vec{U} - \vec{V}$.
Si ha che:
$|W|^2 + |Z|^2 = 2(|U|^2 + |V|^2)$

→ Proprietà Prodotto Scalare

① Commutativa: $\vec{U} \cdot \vec{V} = \vec{V} \cdot \vec{U}$

② distributiva $u(V_1 + V_2) = uV_1 + uV_2$

Vale cioè per la somma che per il Prodotto

$$(\vec{u}_1 + \vec{u}_2)(\vec{V}_1 + \vec{V}_2) = u_1V_1 + u_1V_2 + u_2V_1 + u_2V_2$$

③ $u \cdot u = \|u\|^2$

④ Prodotti scalari degeneri: dato $\vec{u} \neq 0$ si ha $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0$

⑤ $mu \cdot v = u \cdot mv \Rightarrow mu \cdot nv = m \cdot n(u \cdot v)$

$$\alpha = \frac{V \cdot i}{|V|} \qquad V_x = \vec{V} \cdot \hat{i}$$

$$\beta = \frac{V \cdot j}{|V|} \qquad V_y = \vec{V} \cdot \hat{j}$$

$$\gamma = \frac{V \cdot k}{|V|} \qquad V_z = \vec{V} \cdot \hat{k}$$

Delta KRONEKER

$$\delta_{hk} = \begin{cases} 1 \text{ se } h = k \\ 0 \text{ se } h \neq k \end{cases}$$

Mi dice quando vedo a fare il Prodotto scalare, quanto fa il Prodotto dei versori

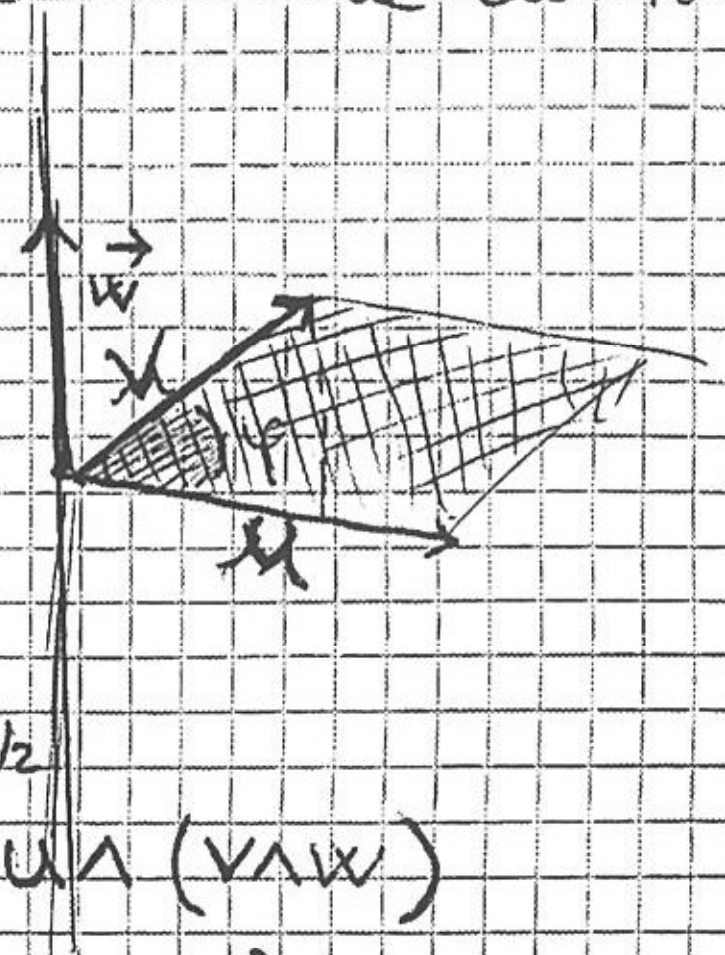
Esempio $i \cdot i = 1$, $i \cdot j = 0$

Prodotto Vettoriale

$$\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$$

da come risultato un vettore la cui direzione è perpendicolare ad entrambi i vettori $\vec{u}, \vec{v}$.
Il verso è deciso con la regola della mano destra, e modulo uguale all'area del parallelogramma generato da $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

$|\vec{w}| = |u||v| \operatorname{sen} \varphi$

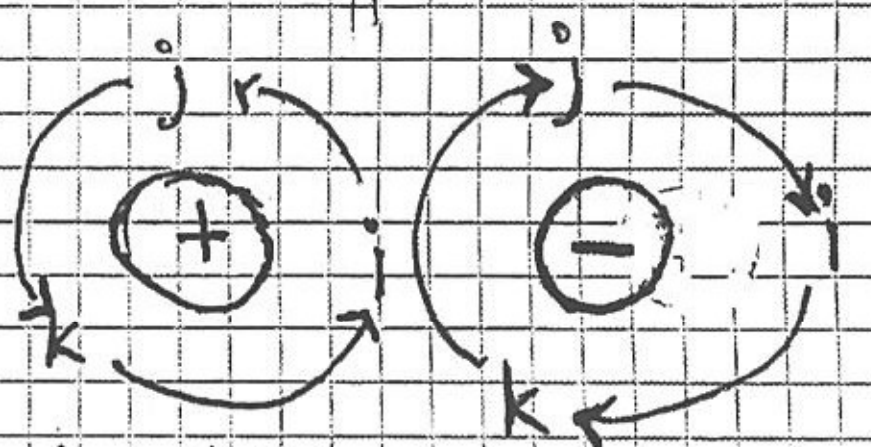


Proprietà prodotto vettoriale

- Anticommutativo: $u \wedge v = -v \wedge u$
- Distributivo $u \wedge (v_1 + v_2) = u \wedge v_1 + u \wedge v_2$

Non è associativo!! $(u \wedge v) \wedge w \neq u \wedge (v \wedge w)$

$i \wedge i = 0$ $\quad i \wedge j = k$
$j \wedge j = 0$ $\quad j \wedge i = -k$
$k \wedge k = 0$ $\quad k \wedge j = -i$
$j \wedge k = i$
$i \wedge k = -j$
$k \wedge i = j$



cioè se faccio $i \wedge j$ ottengo $+k$

cioè se faccio $i \wedge k$ ottengo $-j$

Prodotto Misto

$$u \cdot (v \wedge w) = \det \begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{pmatrix}$$

Se è 0 e i vettori non sono tutti nulli significa che i vettori sono complanari.
Rappresenta il volume con segno del parallelepipedo con spigoli u, v, w

Proprietà di ciclicità $u \cdot (v \wedge w) = w \cdot (u \wedge v) = v \cdot (w \wedge u)$

Doppio Prodotto Vettoriale

$$(u \wedge v) \wedge w = (u \cdot w)\vec{v} - (v \cdot w)\vec{u}$$

Caso in cui $w = u \Rightarrow u \wedge (u \wedge v) = \|u\|^2 v - (u \cdot v) u$