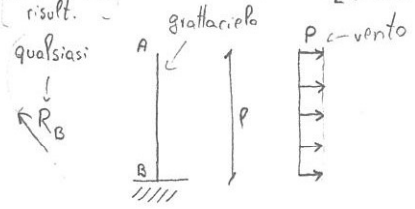
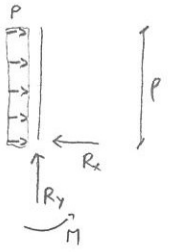
[retta azioni risult.] TRAVE A MENSOLA [Quando studio una trave, vuol dire che devo trovare le reaz. vinc. e caratt. delle sollec.] 5/10/2020



Vincolo incastro perfetto

[è in grado di esercitare una reaz. vincolare qualsiasi]

Reaz. vincolari:

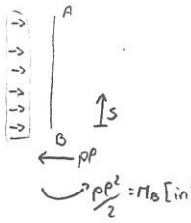


Equil vert. $R_y = 0$

Equil. oriz. $R_x = pl$

rot B) $M - pl\cdot\frac{l}{2} = 0 \rightarrow M = \frac{pl^2}{2}$

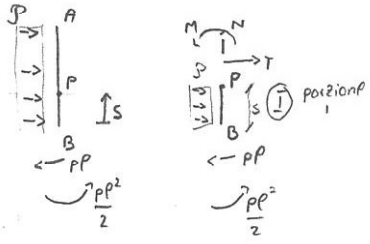
Quindi riscrivendo tutto escludendo le componenti =0, otteniamo



$\frac{pl^2}{2} = M_B$ [intensità coppia incastro] [azioni esterne]

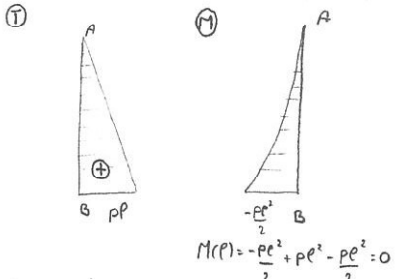
Caratteristiche sollecitazioni [la risultante e il momento risultante delle azioni interne che la parte di una sez. trasversale esercita sull'altra sezione trasversale]

Quindi vado a prendere un punto P, caratterizzato dall'ascissa curvilinea s(P). Isoliamo la sez. trasv. che precede il punto P



$$\begin{cases} N = 0 \\ T + ps - pl = 0 \\ M + ps\cdot\frac{s}{2} - pl\,s + \frac{pl^2}{2} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} N = 0 \\ T = pl - ps \\ M = -\frac{ps^2}{2} + pls - \frac{pl^2}{2} \end{cases}$$

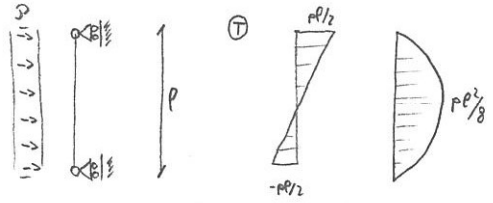
Mom. flettente [azioni interne]



$M(P) = -\frac{pl^2}{2} + pl^2 - \frac{pl^2}{2} = 0$

Il momento va fatto verso le fibre tese

Confrontiamo i risultati con quelli ottenuti da una trave semplicem. appoggiata

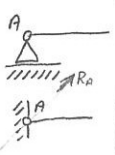


- lo sforzo di taglio si dimezza nella semp. appoggiata [sollecit. diminuita del 50%]
- il momento passa da $\frac{1}{2}pl^2$ a $\frac{1}{8}pl^2$ [riduzione del 75%]

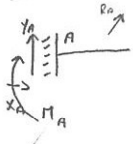
Dispositivi di vincolo



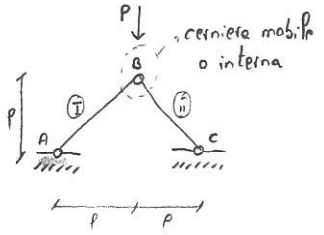
appoggio semplice — comp. incognita reaz. vincol. R_A

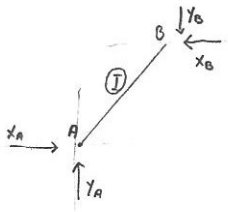


cerniera fissa — comp. incognite X_A, Y_A



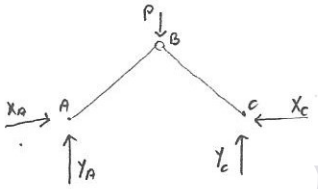
incastro — comp. incognite X_A, Y_A, M_A





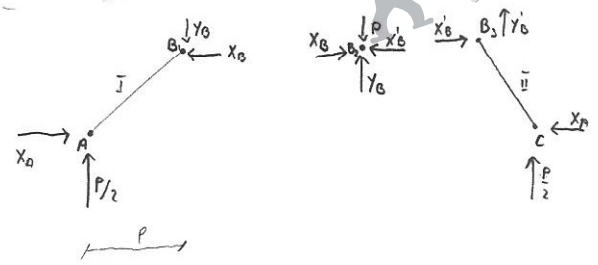
Arco a tre cerniere

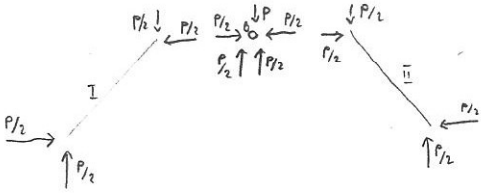
Supponiamo la forza P applicata in B.



$$\begin{cases} X_A - X_C = 0 \rightarrow X_A = X_C \\ Y_A + Y_C - P = 0 \rightarrow Y_A = P/2 \\ Y_C 2P - PP = 0 \rightarrow Y_C = P/2 \end{cases}$$

Non sappiamo quanto valgono X_A e X_C, dividendo il sistema posso trovarmi i valori.





Eq. rot B) $\rightarrow X_A P - \frac{P}{2} P = 0$

$$X_A = \frac{P}{2}$$

Eq. rot B) $\rightarrow X_C \cdot P - \frac{P}{2} P = 0$

$$X_C = \frac{P}{2}$$

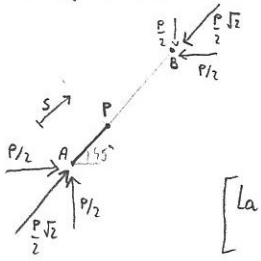
Eq. traslazione

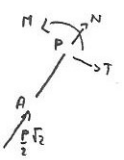
$$\begin{cases} X_B = X_A \\ Y_B = \frac{P}{2} \end{cases}$$

Eq. trasl.

$$\begin{cases} X'_B = \frac{P}{2} \\ Y'_B = -\frac{P}{2} \end{cases}$$

Le 2 forze orizz. e vertic. posso essere considerate come le componenti di una forza inclinata con la direzione uguale alla trave



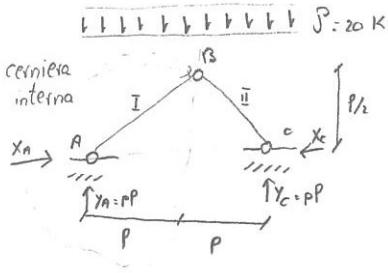


$$\begin{cases} N = -\frac{P}{2}\sqrt{2} \\ T = 0 \\ M = 0 \end{cases}$$

[La trave I è compressa perché abbiamo sforzo normale < 0]

Poiché abbiamo un'asse di simmetria, quello che succede nella trave a sinistra, lo otteniamo a destra. In particolare, essendo un arco a tre cerniere, abbiamo la presenza della sola forza normale.

7/10/2020

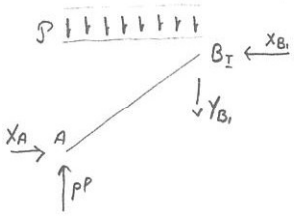


eq. ausiliaria di equilibrio rot B) della parte I

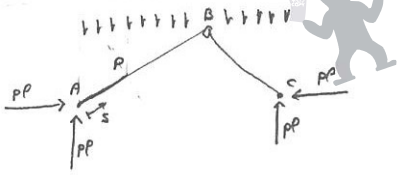
$$pP \cdot P - X_A \cdot \frac{P}{2} - P \cdot P \cdot \frac{P}{2} = 0 \rightarrow X_A = pP$$

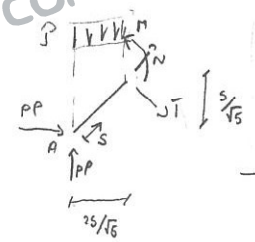
$P \cdot P$: azione del carico distribuito

→ si aggiunge alle 3 equaz. cardinali della statica [2 trasl + 1 rot]



$$\begin{cases} Y_A + Y_C - 2pP = 0 \\ X_A - X_C = 0 \\ Y_C \cdot 2P - 2pP \cdot P = 0 \end{cases}$$

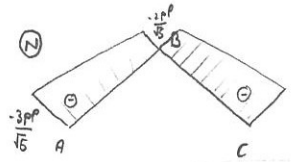




$$N + pP\frac{2}{\sqrt{5}} + pP\frac{1}{\sqrt{5}} - P\frac{2P}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = 0 \rightarrow N_{(S)} = -\frac{3pP}{\sqrt{5}} + \frac{2PS}{5}$$

$$N_{(0)} = -\frac{3pP}{\sqrt{5}}$$

$$N\left(\frac{P\sqrt{5}}{2}\right) = -\frac{3pP}{\sqrt{5}} + \frac{2}{5} pP\frac{\sqrt{5}}{2} = -\frac{2pP}{\sqrt{5}}$$

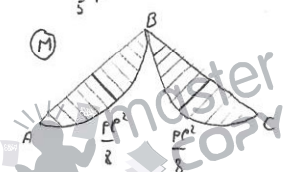


$$T - pP\frac{2}{\sqrt{5}} + pP\frac{1}{\sqrt{5}} + P \cdot \frac{2P}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = 0 \qquad T_{(S)} = \frac{pP}{\sqrt{5}} - \frac{4PS}{5}$$

$$M + \frac{P2P}{\sqrt{5}} \cdot \frac{S}{\sqrt{5}} - pP \cdot \frac{2P}{\sqrt{5}} + pP\frac{S}{\sqrt{5}} = 0 \rightarrow M_{(S)} = -\frac{2PS^2}{5} + \frac{2PPS}{\sqrt{5}} - \frac{PPS}{\sqrt{5}} = \frac{PPS}{\sqrt{5}} - \frac{2PS^2}{5}$$

$$M_{(0)} = 0 \qquad M\left(\frac{P\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{pP}{\sqrt{5}} \frac{P\sqrt{5}}{2} - \frac{2}{5} P \frac{5P^2}{4} = 0$$

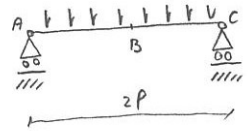
Vertice → $\frac{\frac{pP}{\sqrt{5}}}{\frac{4}{5}P} = \frac{P}{\sqrt{5}} \cdot \frac{5}{4} = \frac{P\sqrt{5}}{4}$ $\quad M\left(\frac{P\sqrt{5}}{4}\right) = \frac{pP}{\sqrt{5}} \frac{P\sqrt{5}}{4} - \frac{2P}{5} P^2 \cdot \frac{5}{16} = \frac{pP^2}{8}$



~~P non è AC, bensì la metà~~ quindi una soluzione equivalente può essere $\frac{pP^2}{2}$

Soluzione alternativa

1 trave



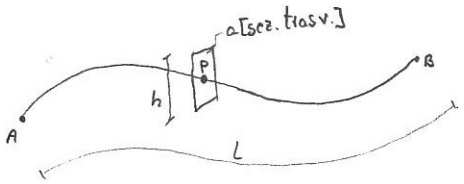
$$M_B = \frac{1}{8} p \cdot 4P^2 = \frac{4pP^2}{8} = \frac{pP^2}{2}$$

4 volte in meno rispetto all'arco

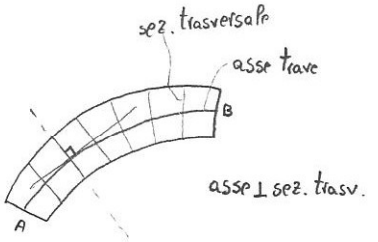
Si può passare dall'arco alla trave app, però ciò non è sempre possibile dal punto di vista funzionale o geometrico

master COPY

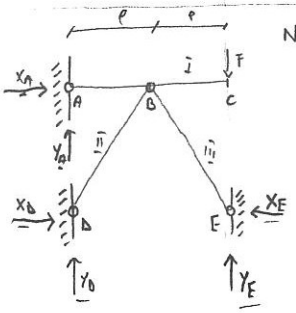
Trave [solido la cui figura piana, anzi il baricentro deve stare sulla curva AB] ← linea d'asse



$\frac{h}{L} \ll 1$ [piccolo ma non troppo in modo che possa trasmettere le cds definite]



La sez. trasv. può cambiare, purchè essa rimanga continua e deformazioni non brusche e limitate

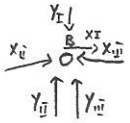


Nella configurazione ABC, $\bar{F}$ non posso trovare equilibrio, quindi devo aggiungere altri elementi di rinforzo [$\bar{II}$; $\bar{III}$]

Spacchettando il sistema in ogni sua componente, posso scrivere 9 eq. di equi. però in 12 incognite [6 est ; 6 int]

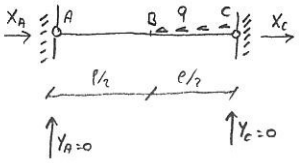
6 compon. incog. reaz. vincolari esterne
2+2+2 = 6 comp. inc. reaz. vin. interne
} 12 . Non è comunque corretto considerare tale numero in quanto le varie eq. non sono indip. tra loro

Nella cerniera interna, (B)



Poichè la retta d'azione di tutte le forze passa per B, è verificato l'equi. alla rotazione. Devono però essere verificate anche le 2 eq. di equil. alla trasl. Questo vuol dire che le 6 comp. non sono tutte indip. fra loro, ma solo 4. [2 eq. di equi in 6 incog.] posso quindi decidere i 4 valori. Di conseguenza, le 6 interne diventano 4, quindi in tutto 10 [6+4] in 9 eq. di equi.

{ 10 incog. ; 9 eq. di equi } → il risultato non è determ. ∞ soluzioni



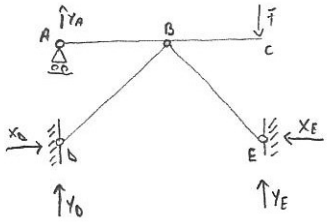
$X_A \cdot q\frac{\ell}{2} + X_C = 0 \rightarrow X_C = q\frac{\ell}{2} - X_A$

3 eq. ; 4 incog. } ∞ soluz.

Sistema indeterminato sul piano statico

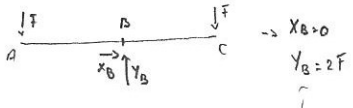
Quindi i sistemi di travi — eq. possibile, 1 cds — sist. determinato
— eq non possibile
— eq possibile, ∞ cds — static. ammissibile

Modificando l'esempio di prima in modo da renderlo stat. determ. Ci aspettiamo 9 eq. in 9 incog.



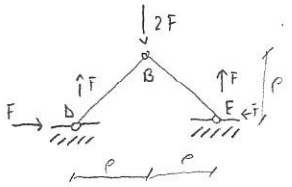
Considerando solo la porzione ABC.

$Y_A \ell + F\ell = 0$ [eq. alla rot. ABC rispetto a B] $\rightarrow Y_A = -F$



$\rightarrow X_B = 0$
$Y_B = 2F$

Per il principio di az-reaz., esse si trasmetteranno alla parte inferiore



[Se troviamo una trave incernierata all'estremità su cui non agiscono distribuz. di carico, è una trave nella quale solo lo sforzo normale è ≠0, cioè un'asta reticolare]

~~16.03.2021~~ 12/10/2020

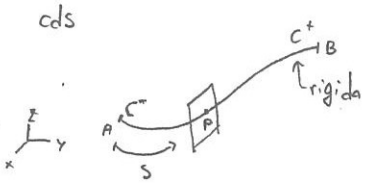
Ricapitolando:

Travi piane: N, T, M [coordinate dello sforzo che la sezione che precede (C^-), esercita su quella che segue (C^+)]

funzioni dell'ascissa curvilinea

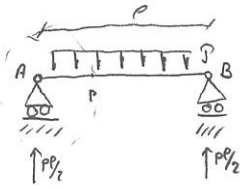
def: $0 \le s \le \ell$

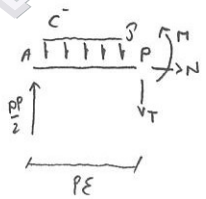
cds



$0 \le s \le \ell$

Posso trovare le reazioni vincolari e le cds utilizzando le equazioni di equi.

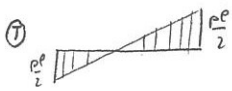




Eq. generale

$T(p\ell) = \frac{p\ell}{2} - p\ell\varepsilon$

$\lim_{\varepsilon \to 0} T(p\ell) = \frac{p\ell}{2}$

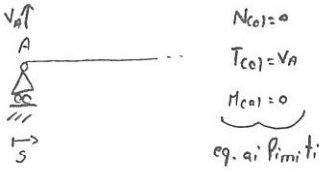


$T_{(0)} = \lim_{\varepsilon \to 0} T(p\ell) = \frac{p\ell}{2}$

Il risultato in $T_{(0)}$ deriva dal fatto che in quel punto $\varepsilon \to 0$, così come in $\varepsilon = \frac{\ell}{2}$ dove $T(\ell\varepsilon)$ sarebbe 0

Allo stesso modo per N e M.

Possiamo dunque già sapere alcune condizioni al contorno conoscendo il tipo di appoggio.

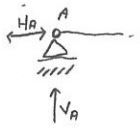


$N_{(0)} = 0$

$T_{(0)} = V_A$

$M_{(0)} = 0$

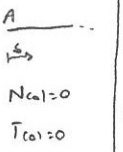
eq. ai limiti per le cds



$N_{(0)} = H_A$ (cambio le direzioni)

$T_{(0)} = V_A$

$M_{(0)} = 0$



$N_{(0)} = 0$

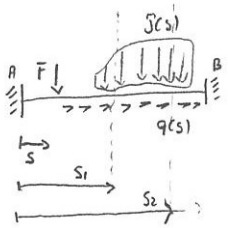
$T_{(0)} = 0$

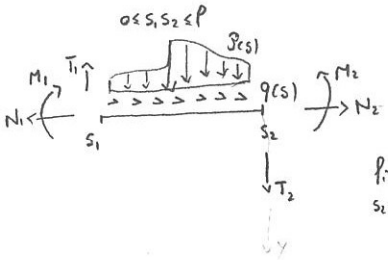
$M_{(0)} = 0$

I valori delle cds sono nulle in prossimità degli estremi. Bisogna fare una distinzione tra i punti negli estremi e quelli sull'asse. Per definizione, le cds [azioni interne] sono definite solo nei punti interni della linea d'asse

cds - equaz. indefinite di equil. [valgono localmente]

Trave ad asse rettilinea





- carichi generici
- prendo una porzione generica $\overline{s_1 s_2}$

$q(s)$ integrabile e continua

$s_1 \le \bar{s} \le s_2$

$N_2 - N_1 + \int_{s_1}^{s_2} q(s)\,ds = 0$

teorema della media

$N_2 - N_1 + q(\bar{s})(s_2 - s_1) = 0$

$\lim_{s_2 \to s_1} \left(\frac{N_2 - N_1}{s_2 - s_1} + q(\bar{s}) \right) = 0 \to \left.\frac{dN}{ds}\right|_{s_1} + q(s_1) = 0 \to \left.\frac{dN}{ds}\right|_{s_1} = N' \to N' = -q$

Esempio:



$N_{(s)} = q \cdot s$

$N' = -q$

Ogni volta che una trave sarà soggetta ad un carico radente uniforme, quella trave sarà soggetta ad uno sforzo normale variabile linearmente

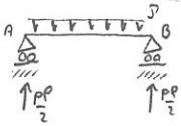
Eq. ind. equi. alla rot (intorno a s_1)

$M_2 - M_1 - T_2(s_2 - s_1) - \int_{s_1}^{s_2} p(s)\,ds\,(s - s_1) = 0$

$M_2 - M_1 - T_2(s_2 - s_1) - p(\bar{s})(\bar{s} - s_1)(s_2 - s_1) = 0$

$\frac{M_2 - M_1}{s_2 - s_1} - T_2 - p(\bar{s})(\bar{s} - s_1) = 0 \to M' - T = 0 \to M' = T$

Per le stesse ipotesi, $T' = -p$ se $p(s)$ è continua



$\begin{cases} N' = 0 \\ T' = -p \\ M' = T \end{cases} \to \begin{cases} N = C_1 \\ T = -ps + C_2 \\ M = -\frac{ps^2}{2} + C_2 s + C_3 \end{cases} \to \begin{cases} N_{(0)} = 0 \to C_1 = 0 \\ T_{(0)} = p\ell/2 \to C_2 = p\ell/2 \\ M_{(0)} = 0 \to C_3 = 0 \end{cases}$