$$-\Delta E + E_\gamma = -\frac{\Delta E^2}{2Mc^2}$$

$$E_\gamma = \Delta E\left(1 - \frac{\Delta E}{2Mc^2}\right)$$

$$\Delta E\left(\frac{2M - m}{2M}\right) = \Delta E\left(\frac{\Delta E}{c^2}\right)$$

$$M = m + \frac{\Delta E}{c^2}$$

$$\frac{2Mc^2 - \Delta E}{2Mc^2} \overset{?}{=} \frac{2M + mc^2}{2Mc^2} = 2mc^2 + \Delta E$$

$$2M = m + \frac{\Delta E}{c^2}$$

$$\frac{M+M}{2M} \overset{?}{=} 1 - \frac{\Delta E}{2mc^2}$$

$$\frac{2m - M}{2m}$$

$$\vec{L} = \sum \vec{r}_i \times \vec{P}_i$$

$$\sum \vec{P}_i = \vec{P}_0$$

$$+ m^2 = 2mM - M^2$$

$$\frac{\Delta E(Mc^2 + mc^2)}{2Mc^2} = \frac{\Delta E}{2}\left(\frac{M + m}{2M}\right) = \frac{\Delta E}{2}\left(1 + \right.$$

$$-\vec{r}_1 \times \vec{P}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{P}_2 = \vec{0}$$

$$(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times \vec{P}_1$$

1.a.1:

- $\beta = \frac{v}{c}$
- $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$

1.a.2:

Dati $X^\mu = (X^0, \vec{X})$, $Y^\mu = (Y^0, \vec{Y})$ si ha:

$$X^\mu Y_\mu := X^\mu \eta_{\mu\nu} Y^\nu \quad \text{dove} \quad \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1.a.3

$$|X^\mu| = X^\mu X_\mu$$

1.a.4

$$x' = \gamma(x - \beta c t)$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$ct' = \gamma(-\beta x + ct)$$

Ovvero:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

1.a.5

(dunque $\partial^0 = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla}\right)$)

- $\partial^\mu := \eta_{\mu\nu}\partial_\nu$ con $\partial_\nu := \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla}\right)$
- Dato A^μ si ha che la 4-divergenza di A^μ è:

$$\partial_\mu A^\mu$$

Dato A_μ si ha che la 4-div. è:

$$\partial^\mu A_\mu$$

- Sia ϕ un invariante di Lorentz il suo diff. è:

$$d\phi = dX^\mu \partial_\mu \phi \quad \left(= \left(\frac{\partial}{\partial t}\phi\right)dt + \vec{\nabla}\phi \cdot d\vec{x}\right)$$

master COPY

- L'operatore di D'alambert applicato a ϕ è:

$$\Box \equiv \partial_\mu \partial^\mu \phi = \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \phi$$

Es. 2.a.6

- $d\tau^2 = |dX^\mu|^2$ è uno scalare di Lorentz

Nel s.d.r. solidale all'oggetto fisico considerato si ha $d\tau^2 = (c^2 dt^2, 0)$ (6)

inoltre nel lab si ha:

$$d\tau^2 = c^2 dt^2 - |d\vec{x}|^2 =$$

$$= dt^2 \left(c^2 - |\vec{v}|^2 \right) = (4)$$

$$\Rightarrow \quad d\tau^2 = dt^2 \left(1 - \frac{|\vec{v}|^2}{c^2} \right) = \frac{dt^2}{\gamma^2}$$

(4), (5)

$$\Rightarrow \boxed{d\tau = \frac{dt}{\gamma}}$$



Il tempo proprio si definisce come il tempo misurato nel s.d.r. solidale con l'oggetto fisico considerato.

In formule:

$$\tau = \int_{t_2}^{t_2} \frac{1}{\gamma(t)} dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}}\, dt$$

Es. 2.a.7

- Un "invariante di Lorentz" è una grandezza che viene lasciata invariata dalle trasf. di Lorentz.

(vedi) Es. 1.a.8

$$u^\mu := \frac{dX^\mu}{d\tau} \quad \left(\text{dunque: } u^\mu = (\gamma c, \gamma \vec{v}) \right)$$

$$|u^\mu|^2 = \left| \frac{dX^\mu}{d\tau} \right|^2 = \left| \gamma^2 \left| \frac{dX^\mu}{dt} \right|^2 \right| =$$

$= \gamma^2 \left[\cancel{\quad} c^2 - |\vec{v}|^2 \right] = c^2 = I$ (OK)

- $p^\mu = m u^\mu$ (dunque: $p^\mu = (m\gamma c, m\gamma \vec{v})$)

$|p^\mu|^2 = m^2 c^2 = A m^2$ (OK)

I, misura in $\mathbb{R}^4$

m 1.a.9

$p^\mu = (m\gamma c, m\gamma \vec{v}) \left(= m \frac{dx^\mu}{d\tau} \right)$

è costante nel tempo per un sistema isolato.

pm 1.a.10

- X^μ è controvariante quando trasforma così:

$$X'^\mu = \Lambda^\mu_{\ \nu} X^\nu$$

- X_μ è covariante quando trasforma così:

$$X'_\mu = (\Lambda^{-1})^\nu_{\ \mu} X_\nu$$

(come $x_\mu = A_\mu^{\ \nu} x_\nu$ dove $A_\mu^{\ \nu} := g_{\mu\alpha} \Lambda^\alpha_{\ \beta} g^{\beta\nu}$)

- Un TENSORE covariante di rango 2 è un oggetto con 2 indici che trasforma così:

$$F'_{\mu\nu} = (\Lambda^{-1})^\alpha_{\ \mu} (\Lambda^{-1})^\beta_{\ \nu} F_{\alpha\beta}$$

e la sua traccia è def. come:

$$F^\mu_{\ \mu} = g^{\mu\nu} F_{\nu\mu}$$

master COPY

1.a.11:

$$\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1.a.12

- Un tensore $F^{\mu\nu}$ controvariante di rango 2 è def. come un tensore t.c.

$$F^{\nu\mu} = -F^{\mu\nu}$$

- Scritto in componenti:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

si può indicare brevemente con $F^{\mu\nu} = (0, -\vec{E}, \vec{B})$

con $\vec{E} := (E_1, E_2, E_3)$ e $\vec{B} := (B_1, B_2, B_3)$

↑ vettore polare ↑ vettore assiale

1.a.13:

- Una legge fisica è scritta in forma covariante quando è un'uguaglianza tra due oggetti che trasformano allo stesso modo sotto cambi di s.d.R., ossia se hanno gli stessi indici "covariante" e "controvariante".

1.a.14 Per un BOOST lungo x:

- $V'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{d\gamma(x - V_0 t)}{d\gamma(t - \frac{\beta x}{c})} = \frac{dx - V_0 dt}{dt - \frac{\beta dx}{c}} = \frac{V_x - V_0}{1 - \frac{V_0 V_x}{c^2}}$

- $V'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\gamma(dt - \frac{\beta dx}{c})} = \frac{V_y}{\gamma(1 - \frac{V_0 V_x}{c^2})}$