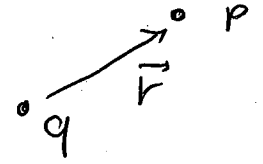
CAMPO ELETTRICO

- Proprietà carica elettrica → può essere + o −
  - → è la somma algebrica delle cariche in un sistema isolato non cambia (Legge di conservazione della carica)
  - → il suo valore non dipende dal sistema di riferimento

$\vec{F} = q' \vec{E}$

- una carica q altera lo spazio circostante generando un campo elettrico
- forza di cui risente una carica q'

Legge di Coulomb $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$



- ↓ campo elettrico in un punto P prodotto da una carica puntiforme q
- $\hat{r}$ → direzione che va da q a P
- $\frac{1}{r^2}$ → L'intensità del campo elettrico è inversamente proporzionale al quadrato della distanza

Principio di Sovrapposizione $\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i$

↓

Il campo elettrico generato da un sistema di più cariche puntiformi è uguale alla somma vettoriale dei campi generati separatamente

⇓

permette di calcolare il campo elettrico generato da un qualunque sistema di carica vedendolo come un aggregato di cariche puntiformi

Distribuzione continua vs discreta $\rho = \frac{dq}{dV}$ $\sigma = \frac{dq}{dS}$ $\lambda = \frac{dq}{de}$

$\vec{E} = \sum \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r_i^2} \hat{r}_i$ $\qquad \boxed{\vec{E} = \int_V \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\rho \cdot dV}{r^2} \hat{r}\, dr}$ $\qquad dq = \rho \cdot dV$

Per una distribuzione continua di carica passo dalla sommatoria all'integrale usando la densità per esprimere la carica

- Linee di forza → ogni linea è tangente al campo in ogni punto. La densità delle linee è proporzionale all'intensità del campo

Teorema di Gauss $\Phi_{S(V)}(\vec{E}) = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$

↓

Il flusso del campo elettrico attraverso una sup. chiusa S è uguale alla somma algebrica delle cariche contenute all'interno della superficie, diviso la costante dielettrica del vuoto

Flusso vettoriale $\Phi_S(\vec{F}) = \int_S \vec{F} \cdot \hat{n}\, dA$

Φ_S può essere aperta o chiusa; $\vec{F}$ → campo vettoriale

Teorema della divergenza (Teorema di Gauss) → teorema da riferire solo a sup chiuse

$$\int_{S(V)} \vec{F} \cdot \hat{n}\, dA = \int_{V(S)} \vec{\nabla} \cdot \vec{F}\, dV$$

(integrali non di potabile definiti se volume da essa racchiusa)

$$\int_S \vec{E} \cdot \hat{n}\, ds = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho dV}{\varepsilon_0}$$

per considerare le variazioni del campo elettrico nelle immediate vicinanze del punto

$\langle \rho \rangle$ densità media

$$\frac{1}{V}\int_S \vec{E} \cdot \hat{n}\, ds = \frac{\langle \rho \rangle}{\varepsilon_0}$$

per $V \neq 0$ → media → nel punto: $\langle \rho \rangle \to \rho$

per $V \to 0$: $\lim_{V \to 0} \frac{\int_S \vec{E} \cdot \hat{n}\, ds}{V} = \operatorname{div} \vec{E}$

$$\text{div}\,\vec{E} = \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \nabla_x E_x + \nabla_y E_y + \nabla_z E_z = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

in coordinate cartesiane (+ coordinate cilindriche e sferiche) !

$$\boxed{\text{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

Campo magnetico → ie suo flusso nel materiale e per campi variabili non cambia in quanto resta vero che i campi magnetici hanno linee di forza chiuse su se stesse

$$\Phi_{S(V)}(\vec{B}) = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0}$$

S(V) sup chiusa
S$_\gamma$ sup aperta

dimostrazione

$$\Phi_{S(V)}(\vec{B}) = \int_{S(V)} \vec{B}\cdot\hat{n}\,ds = \int_{V(S)} \vec{\nabla}\cdot\vec{B}\,dV = 0$$

usando le teo. di gauss

l'unica possibilità affinché l'integrale sia nullo è che $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$

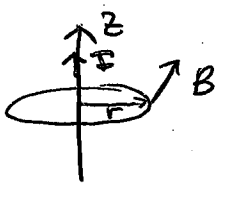
dimostrazione

$$\Phi_S(\vec{E}) = \int_{S(V)} \vec{E}\cdot\hat{n}\,ds = \int_{V(S)} \vec{\nabla}\cdot\vec{E}\,dV = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \int_{V(S)} \frac{\rho_{TOT}}{\varepsilon_0}\,dV$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho_{TOT}}{\varepsilon_0}$$

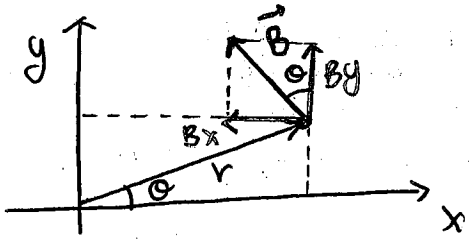
ESERCIZIO

Dimostrare che la divergenza del campo magnetico è nulla per la legge di Biot-Savart



$$\begin{cases} B_z = 0 \\ B_r = 0 \\ B_\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \end{cases}$$

per calcolare la divergenza esprimo il campo in coordinate cartesiane



$x = r\cos\theta$ $\quad \cos\theta = \frac{x}{r}$

$y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$ $\quad \mathrm{sen}\,\theta = \frac{y}{r}$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$\begin{cases} B_y = B\cos\theta \\ B_x = -B\,\mathrm{sen}\,\theta \\ B_z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_y = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\cdot\frac{x}{r}\,\hat{y} \\ B_x = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\cdot\frac{y}{r}\,\hat{x} \\ B_z = 0 \end{cases}$$

$\frac{\partial B_y}{\partial y} = \emptyset$

$\frac{\partial B_x}{\partial x} = \emptyset$

$\frac{\partial B_z}{\partial z} = \emptyset$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = \emptyset$$

Esercizio

Calcolare la divergenza del seguente campo elettrico

$E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x}{R^3}$ $\quad E_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{y}{R^3}$ $\quad E_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{R^3}$

$R = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right\} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{R}$

$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R^3 - 3R^2\cdot\frac{x}{R}\cdot x}{R^6} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R^3-3Rx^2}{R^6} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{R^2-3x^2}{R^5}$

$\frac{\partial E_y}{\partial y} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{R^2-3y^2}{R^5}$ $\quad i$ $\quad \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{R^2-3z^2}{R^5}$

ELETTROSTATICA NEL VUOTO

Potenziale Elettrico $\phi(\vec{R}) = \phi(\vec{R}_0) - \int_{\vec{R}_0}^{\vec{R}} \vec{E} \cdot d\vec{e}$

Da cui ottengo che $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi = \left(-\frac{\partial V}{\partial x}, -\frac{\partial V}{\partial y}, -\frac{\partial V}{\partial z}\right)$

$\vec{E}$: vettore; ϕ: scalare

Equazione di Poisson

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi \Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \vec{\nabla}\cdot(-\vec{\nabla}\phi) = \frac{\rho_{TOT}}{\varepsilon_0}$$

$$-\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = \frac{\rho_{TOT}}{\varepsilon_0}$$

Laplaciano $\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ (espressione in coordinate cartesiane) $\Rightarrow$ $\boxed{\Delta\phi = -\frac{\rho_{TOT}}{\varepsilon_0}}$

$$\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$ forma cilindrica

forma sferica $\Delta = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial}{\partial R}\right) + \frac{1}{R^2\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{R^2\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$

Perché è utile l'equazione di Poisson?

1) Perché il potenziale ϕ è un campo scalare, quindi più facile da usare di uno vettoriale

2) Per motivi pratici, cioè nella risoluzione dei problemi:

CLASSE 1 problemi

- conosco le posizioni di tutte le cariche $q_1, \dots, q_n$ $\hat{R}_1, \dots, \hat{R}_n$

