26/09

TEOREMA DELLA DIVERGENZA: $\iiint_V \operatorname{div}\vec{E}\,dV = \iint_{S_{LV}} \vec{E}\cdot\vec{n}\,dV$ (CHE È UGUALE AL FLUSSO)

- $\Phi_{S_{CHIUSA}}(\vec{E}) = \frac{Q_{INT}}{\varepsilon_0}$
- $\Phi_{S_{CHIUSA}}(\vec{B}) = 0$
- $\oint_\gamma \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$ (POI MODIFICATA PERCHÈ VALE SOLO PER ELETTROSTATICA)
- $\oint_\gamma \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 i_\gamma$ (POI MODIFICATA PERCHÈ VALE SOLO PER $\vec{B}$ STATICI)

} NEL VUOTO

SCRITTE IN FORMA INTEGRALE

S(γ) = SUPERFICIE (APERTA) S LIMITATA DALLA LINEA γ (CIOÈ γ È IL BORDO DI S)

1) $\Phi_S(\vec{D}) = Q_{\text{LIBERA}}$ INTERNA ALLA SUP.
2) $\Phi_S(\vec{B}) = 0$
3) $\oint_\gamma \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\Phi_{S(\gamma)}(\vec{B})$
4) $\oint_\gamma \vec{H}\cdot d\vec{l} = i_{\text{CONDUZIONE}\,S(\gamma)} + \frac{d}{dt}\Phi_{S(\gamma)}\vec{D}$

$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}(\vec{E})$
$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}(\vec{H}))$

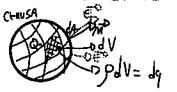
$\vec{P}$ = POLARIZZAZIONE
$\vec{M}$ = MAGNETIZZAZIONE (DIPENDONO DAI MATERIALI, INFATTI NEL VUOTO TORNANO COME PRIMA)

1) $\Leftrightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho_{\text{LIBERA}}$
2) $\Leftrightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$
3) $\Leftrightarrow \vec{\nabla}\wedge\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$
4) $\Leftrightarrow \vec{\nabla}\wedge\vec{H} = i_{\text{CONDUZIONE}} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$

$\vec{\nabla}\cdot\vec{F}$ = DIVERGENZA $= \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z}$

$\vec{\nabla}\wedge\vec{F}$ = ROTORE $= \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}\,;\ \frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x}\,;\ \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}\right)$

LEGGE DI GAUSS (PER ORA NEL VUOTO)



(ρ PUÒ ESSERE VARIABILE O COSTANTE)

$\Phi_S(\vec{E}) = \frac{Q_{INT}}{\varepsilon_0}$ $\quad \int_{S(V)} \vec{E}\cdot\vec{n}\,dA = \int_{V(S)} \frac{\rho\,dV}{\varepsilon_0}$

TEOREMA DI GAUSS: $\int_{V(S)} \vec{\nabla}\cdot\vec{F}\,dV = \int_{S(V)} \vec{F}\cdot\hat{n}\,dA$ (PER TEOREMA MATEMATICO)

V(S) = VOLUME V CHE HA COME CONTORNO IL BORDO S
S(V) = SUPERFICIE (CHIUSA) CHE RACCHIUDE IL VOLUME V

GRAZIE AL TEOREMA DI GAUSS → $\int_{V(S)} \vec{\nabla}\cdot\vec{E}\,dV = \int_{V(S)} \frac{\rho\,dV}{\varepsilon_0}$ → $\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho(x,y,z)}{\varepsilon_0}$ ⇒

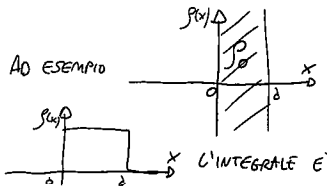
LEGGE DI GAUSS IN FORMA DIFFERENZIALE: $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ CON ρ = CARICA TOTALE IN dV

- ρ SIMMETRICA CON SIMMETRIA (PIANA: $\rho = \rho(x) \Rightarrow E_y = E_z = 0$; CILINDRICA: $\rho = \rho(r) \Rightarrow E_\theta = E_z = 0$; SFERICA: $\rho = \rho(R) \Rightarrow E_\theta = E_\varphi = 0$) } DISTANTI DAL CENTRO

SIMMETRIA PIANA

$\begin{cases} \frac{dE_x}{dx} = \frac{\rho(x)}{\varepsilon_0} & \text{IN ELETTROSTATICA, SE SONO DATE LE CARICHE, LA SOLUZIONE } \exists! \\ \text{(CON LE CONDIZIONI INIZIALI)} \Rightarrow E_x(x) - E_x(x_0) = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_{x_0}^{x}\rho(x)dx \end{cases}$

AD ESEMPIO



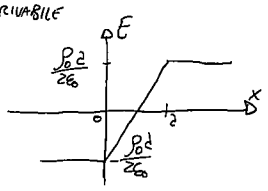
$\rho(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ \rho_0 & 0<x<a \\ 0 & x>a \end{cases}$ ⇒ $x_0 = 0$, $E_x(x_0) = C$

L'INTEGRALE È CONTINUO MA NON DERIVABILE

PROPRIETÀ DELLA SIMMETRIA PIANA: $E_x(-\infty) = -E_x(+\infty)$

$\Rightarrow E_x = \begin{cases} C & x<0 \\ C + \frac{\rho_0 x}{\varepsilon_0} & 0<x<a \\ C + \frac{\rho_0 a}{\varepsilon_0} & x>a \end{cases}$

$\rightarrow -C = C + \frac{\rho_0 a}{\varepsilon_0} \Rightarrow C = -\frac{\rho_0 a}{2\varepsilon_0} \Rightarrow E_x = \begin{cases} -\frac{\rho_0 a}{2\varepsilon_0} & x<0 \\ \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}(x-a) & 0<x<a \\ \frac{\rho_0 a}{2\varepsilon_0} & x>a \end{cases}$

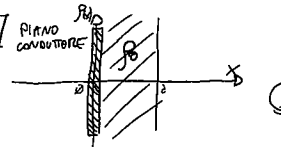


OPPURE SI FACEVA PARTENDO CON $x_0 = \frac{a}{2}$ PERCHÈ SAPPIAMO CHE $E_x(\frac{a}{2}) = 0$

27/09

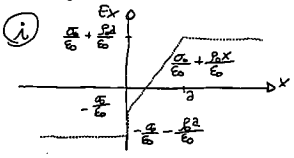
$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho_{\text{TOTALE}}}{\varepsilon_0} \rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho(x,y,z)}{\varepsilon_0}$ ⇐ VALE SEMPRE (ANCHE PER CAMPI VARIABILI NEL TEMPO)

EXE

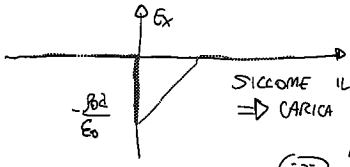


PIANO { CASO i: σ_0 → BANALE $E(-\infty) = -E(+\infty)$; CASO ii: $V(0) = 0$ MA CON DENSITÀ SUPERFICIALE INCOGNITA → L'UNICO PUNTO CHE DEVE ESSERE DISCONTINUO È SUL PIANO, LA PENDENZA TRA 0 E a DEVE ESSERE LA STESSA

(i)

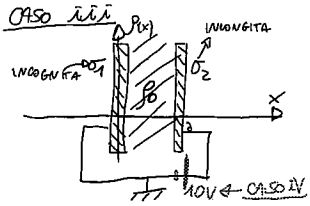


(ii)



SICCOME IL CAMPO ELETTRICO FUORI È 0 ⇒ CARICA TOTALE NULLA

CASO iii



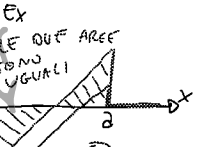
σ_1, σ_2?

$E_x = \begin{cases} \text{COSTANTE } K + \frac{\rho_0 x}{\varepsilon_0} & 0<x<a \\ 0 & x<0,\ x>a \end{cases}$

$\int_0^a E_x dx = -[V(a) - V(0)] \Rightarrow \int_0^a E_x dx = 0 \Rightarrow$ AREE UGUALI

CI DEVE ESSERE UN SALTO SU ENTRAMBI I PIANI

(iii)



(iv)

E(R⃗) e V(R⃗) SI POSSONO CALCOLARE SE SONO NOTI I POTENZIALI SU OGNI CONDUTTORE (1), OPPURE LE CARICHE TOTALI SU OGNI CONDUTTORE (2), OPPURE LE CARICHE O POTENZIALE SU OGNI CONDUTTORE (3)

PROBLEMA GENERALE IN ELETTROSTATICA (1) PROBLEMA DIRICHELET (2) PROBLEMA NEUMANN (3) PROBLEMA MISTO

- $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z) = \left(-\frac{\partial V}{\partial x}, -\frac{\partial V}{\partial y}, -\frac{\partial V}{\partial z}\right) = -\vec{\nabla}V$ → GRADIENTE

LAPLACIANO $= \Delta(=\vec{\nabla}^2) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}$ CIOÈ LA DIVERGENZA DEL GRADIENTE

$\Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \rightarrow \vec{\nabla}\cdot(-\vec{\nabla}V) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \rightarrow \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}V) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$ EQUAZIONE DI POISSON (EQ. FONDAMENTALE DELL'ELETTROSTATICA)

QUESTA EQUAZIONE AMMETTE UNA E UNA SOLA SOLUZIONE SE SONO NOTI I 3 CASI DEL PROBLEMA GENERALE IN ELETTROSTATICA

SI DISTINGUONO 4 SITUAZIONI DIVERSE

FISICA 2

1) SIMMETRIA PIANA: $\rho(x) \Rightarrow \frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{\rho(x)}{\varepsilon_0}$ ↝ LA SOLUZIONE SI TROVA INTEGRANDO DUE VOLTE

2) SIMMETRIA CILINDRICA: $\rho(r)$ DISTANZA DA UN'ASSE $\Rightarrow \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rE_r) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$; $\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dV}{dr}\right) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ LAPLACIANO DI V IN COORDINATE CILINDRICHE

3) SIMMETRIA SFERICA: $\rho(R)$ DISTANZA DA UN PUNTO $\Rightarrow \frac{1}{R^2}\frac{d}{dR}(R^2E_R) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$; $\frac{1}{R^2}\frac{d}{dR}\left(R^2\frac{dV}{dR}\right) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$

4) NESSUNA SIMMETRIA → $V(\vec{R}) = \int_{\text{TUTTO LO SPAZIO}} \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 R}$ $(dq = \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz)$ → $\int_{\text{TUTTO LO SPAZIO}} \frac{\rho\,dx\,dy\,dz}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ (NOTE LE CARICHE)



$dV(R) = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 R}$

SIMMETRIA CILINDRICA → $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}$ IN COORDINATE CILINDRICHE $= \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rE_r) +$ (TERMINI CHE DIPENDONO DA E_θ E E_z) $\Rightarrow \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rE_r) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

SIMMETRIA SFERICA → DA CILINDRICA A SFERICA E' UGUALE, MA DOVE C'E' r METTO R^2 ↝ $\frac{1}{R^2}\frac{d}{dR}(R^2E_R) +$ (TERMINI CHE DIPENDONO DA E_θ E E_φ) $= \frac{\rho}{\varepsilon_0}$



IL FLUSSO SULLA SUPERFICIE ESTERNA $= 4\pi(R+dR)^2 \cdot E_R(R+dR)$
IL FLUSSO SULLA SUPERFICIE INTERNA $= 4\pi R^2 E_R(R)$
FLUSSO $= 4\pi(R+dR)^2E_R(R+dR) - 4\pi R^2E_R(R) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}4\pi R^2\,dR$

→ $\left(R^2 + 2R\,dR + dR^2\right)\left(E_R(R) + \frac{dE_R}{dR}dR + \dots\right) - R^2E_R(R) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}R^2\,dR$ (INFINITESIMO DI ORDINE SUPERIORE)

→ $R^2E_R + 2RE_R\,dR + R^2\frac{dE_R}{dR}dR + \left(\frac{d^2E_R}{dR^2}\right)dR^2 \cdot 2R = R^2E_R = \frac{\rho}{\varepsilon_0}R^2\,dR \Rightarrow 2RE_R + R^2\frac{dE_R}{dR} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}R^2 \Rightarrow \frac{d}{dR}(R^2E_R) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}R^2$

(SVILUPPO DI TAYLOR; DERIVATA DEL PRODOTTO)

NESSUNA SIMMETRIA $\rho = 0$ SE IL LAPLACIANO DI V E' NULLO $\Rightarrow$ EQUAZIONE DI LAPLACE $\Delta V = 0$

IL VALORE IN UN PUNTO P E' PARI ALLA MEDIA DEI VALORI IN UN SUO INTORNO (SE VALE LAPLACE)

DIM 1 DIMENSIONE



$f(x+dx) = f(x) + f'(x)\,dx + \frac{1}{2}f''(x)\,dx^2$
$f(x-dx) = f(x) - f'(x)\,dx + \frac{1}{2}f''(x)\,dx^2$
$\Rightarrow f(x+dx) + f(x-dx) = 2f(x) + f''(x)\,dx^2 \Rightarrow f(x) = \frac{f(x+dx)+f(x-dx)}{2}$ (Ø SE VALE // LAPLACE)

CIOE' IL VALORE MEDIO

SE SONO IN 2 DIMENSIONI, PRENDO 4 VALORI VICINI E DIVIDO PER 4; SE SONO IN 3 DIMENSIONI, PRENDO 6 VALORI E DIVIDO PER 6.
UN COMPUTER CALCOLA ITERATIVAMENTE LA MEDIA PER OGNI PUNTO FINO A RAGGIUNGERE L'EQUILIBRIO

ESE SFERA



$\rho = \begin{cases} 0 & R > a \\ \rho_0\frac{R}{a} & R < a \end{cases}$

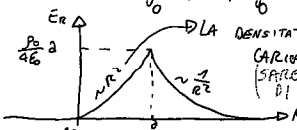
PER $R<a$ → $\frac{1}{R^2}\frac{d}{dR}(R^2E_R) = \frac{\rho_0 R}{\varepsilon_0 a}$

$E_R(0) = 0$ SEMPRE VERA
$V(\infty) = 0$ SCELTO ARBITRARIAMENTE

PER SIMMETRIE SFERICHE E CILINDRICHE: $\int_0^R d(R^2E_R) = \int_0^R \rho_0\frac{R^3}{\varepsilon_0 a}dR \Rightarrow R^2E_R(R) - 0 = \int_0^R \frac{\rho(R)}{\varepsilon_0 a}R^3\,dR$

$\begin{cases} \frac{\rho_0}{\varepsilon_0 a}\frac{R^4}{4} - 0 & R<a \\ \frac{\rho_0}{\varepsilon_0 a}\left[\int_0^a R^3dR + \int_a^R 0\,dR\right] = \frac{\rho_0 a^3}{4\varepsilon_0} & R>a \end{cases}$

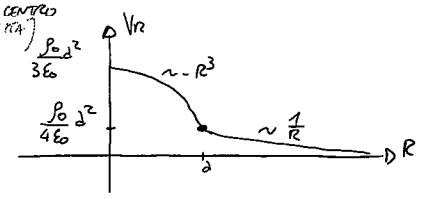
$\Rightarrow E_R = \begin{cases} \frac{\rho_0}{4\varepsilon_0 a}R^2 & R<a \\ \frac{\rho_0}{4\varepsilon_0}\frac{a^3}{R^2} & R>a \end{cases}$



LA DENSITA' DI CARICA NON E' COSTANTE, MA E' PIU' CARICA FUORI E MENO CARICA AL CENTRO (SAREBBE LINEARE SE LA DENSITA' DI CARICA FOSSE UNIFORME)

$V(\infty) - V(R) = -\int_\infty^R E_R\,dR$

$\Rightarrow V(R) = \int_R^\infty E_R\,dR = \begin{cases} R<a & \int_R^a E_R\,dR + \int_a^\infty E_R\,dR = \frac{\rho_0}{4\varepsilon_0 a}\left(\frac{a^3}{3} - \frac{R^3}{3}\right) + \frac{\rho_0 a^2}{4\varepsilon_0} \\ R>a & \int_R^\infty \frac{\rho_0 a^3}{4\varepsilon_0 R^2}dR = \frac{\rho_0 a^3}{4\varepsilon_0 R} \end{cases}$

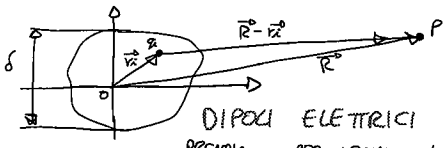


28/09

$f(x_0 + \Delta x) \simeq f(x_0) + f'|_{x_0}\Delta x + \dots (\Delta x)^2$ $\quad f(\vec{R}^0 + \Delta\vec{R}^0) = f(\vec{R}^0) + \left[\vec{\nabla}f\right]_{\vec{R}^0}\cdot\Delta\vec{R}^0 + \dots (\Delta\vec{R})^2$ (GRADIENTE; SCALARE)

$\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z$ $\quad \vec{R} = (x,y,z)$

SE IO HO UN SISTEMA DI CARICHE (POSITIVE E NEGATIVE)



$|\vec{R}^0| \gg \delta > |\vec{r}_i|$

$\vec{E}(P)$? $\quad V_P$? $\quad V(\infty) = 0$ POICHE' LE CARICHE STANNO TUTTE IN UNA REGIONE

$\Rightarrow V(R) = \frac{\sum q_i}{4\pi\varepsilon_0 R}$

DIPOLI ELETTRICI

PRENDIAMO, PER ESEMPIO, UN CASO PARTICOLARE IN CUI $\sum q_i = 0 \Rightarrow V(R) \simeq 0$ (CIRCA POICHE' DIPENDE ANCHE DALLA DISTANZA RISPETTO AD OGNI CARICA)

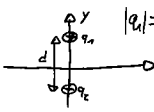
$\Rightarrow V(R) = \sum_\lambda \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0|\vec{R}^0 - \vec{r}_i^0|} = \sum_\lambda \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(\vec{R}^0 - \vec{r}_i^0)\cdot(\vec{R}^0 - \vec{r}_i^0)}} = \sum_\lambda \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2 - 2\vec{R}^0\cdot\vec{r}_i^0 + r_i^2}}$

[APPROSSIMAZIONI $\sqrt{1+\varepsilon} \simeq 1 + \frac{\varepsilon}{2} + o(\varepsilon^2)$ $\quad \frac{1}{1-\varepsilon} \simeq 1 + \varepsilon + o(\varepsilon^2)$ $\quad \varepsilon \ll 1$]

$\simeq \sum_\lambda \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 R\sqrt{1 - \frac{2\vec{r}_i\cdot\vec{R}^0}{R^2}}} \simeq \sum_\lambda \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 R\left(1 - \frac{\vec{r}_i\cdot\vec{R}^0}{R^2}\right)} \simeq \sum_\lambda \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 R}\left(1 + \frac{\vec{r}_i\cdot\vec{R}^0}{R^2}\right) = \left(\sum_\lambda \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 R}\right) + \sum_\lambda \frac{q_i\,\vec{r}_i\cdot\vec{R}^0}{4\pi\varepsilon_0 R^3} = \frac{\left(\sum_\lambda q_i\vec{r}_i^0\right)\cdot\vec{R}^0}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$ (PER IPOTESI → 0)

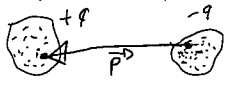
$\Rightarrow \boxed{V(R) = \frac{\vec{P}^0\cdot\vec{R}^0}{4\pi\varepsilon_0 R^3}}$ $\quad \vec{P} = \sum_\lambda q_i\vec{r}_i^0 =$ MOMENTO DI DIPOLO ELETTRICO = VETTORE CHE HA COME MODULO IL PRODOTTO DELLA CARICA PER LA DISTANZA, E DIREZIONE DALLA CARICA NEGATIVA A QUELLA POSITIVA

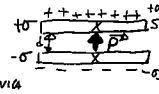
- ESEMPIO PIÙ SEMPLICE DI UN DIPOLO ELETTRICO



$|q_1| = |q_2|$ $\quad P_x = +q_1\cdot 0 + (-q_2)\cdot 0 = 0$ COSÌ COME $P_z = 0$ $\quad P_y = +q_1\frac{d}{2} + (-q_2)\cdot\left(-\frac{d}{2}\right) = qd$ $\quad \Rightarrow \vec{P} = (0, qd, 0)$

- SE HO DUE REGIONI DI CARICA UGUALE IN MODULO, SI PRENDE IL CENTRO DELLA DISTRIBUZIONE DELLE CARICHE E SI CALCOLA IL DIPOLO. QUESTO E' UTILE NEI CONDENSATORI





$\Rightarrow |\vec{P}| = \sigma S d$

SE PRENDO L'ATOMO DI IDROGENO, HA CARICA TOTALE 0 $\Rightarrow \vec{P}^0 = 0$





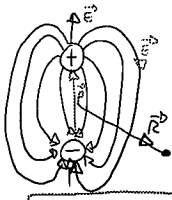
QUINDI C'E' MOMENTO DI DIPOLO ELETTRICO PERCHE' IL CENTRO DELLE CARICHE NEGATIVE E' PIÙ LONTANO DAL NUCLEO DELL'IDROGENO

LE MOLECOLE POLARI HANNO UN MOMENTO DI DIPOLO PERMANENTE FORTE. HO ESEMPIO $\begin{cases} HCl \\ H_2O \end{cases}$

$|\vec{P}| \simeq e\cdot 0{,}1\,\text{Å} = 1{,}6\cdot 10^{-19}\,C\cdot 10^{-11}\,m \simeq 10^{-30}\,cm$

FISICA 2

CHE LINEE DI FORZA DEVE AVERE IL CAMPO ELETTRICO IN UN DIPOLO ELETTRICO?



$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$ LA COMPONENTE K DI E $\rightarrow$ $4\pi\varepsilon_0 E_K = -\frac{d}{dx_K}\left(\frac{\vec{P}^0\cdot\vec{R}^0}{R^3}\right) = -\frac{d}{dx_K}\left(\frac{\sum_i P_i x_i}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{3/2}}\right)$ $\quad \vec{R}^0 = (x_1, x_2, x_3)$ PRODOTTO SCALARE = SOMMA DELLE COMPONENTI

$\delta_{iK} = \frac{dx_i}{dx_K} \begin{cases} 1 \text{ SE } i=K \\ 0 \text{ SE } i\neq K \end{cases}$

$4\pi\varepsilon_0 E_K = -\sum_i P_i \frac{d}{dx_K}\left(\frac{x_i}{R^3}\right) = -\sum_i P_i \frac{\delta_{iK}R^3 - 3Rx_i x_K}{R^6}$

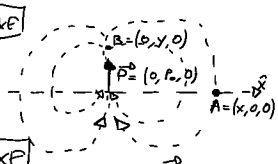
$\frac{dR^3}{dx_K} = 3R^2\frac{dR}{dx_K} = 3R^2\frac{d}{dx_K}\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\right)$

$= \sum_i \frac{3x_i x_K P_i - \delta_{iK}R^2 P_i}{R^5} = \frac{3x_K(\vec{R}^0\cdot\vec{P}^0) - R^2 P_K}{R^5}$

$= \frac{3R^2}{2\sqrt{\dots}}\, 2x_K = 3Rx_K$

$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{3(\vec{P}^0\cdot\vec{R}^0)\vec{R}^0 - \vec{P}^0 R^2}{4\pi\varepsilon_0 R^5}}$ $\rightsquigarrow$ CAMPO ELETTRICO GENERATO DA UN BIPOLO IN UNA QUALUNQUE POSIZIONE

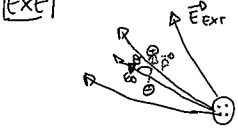
ESE



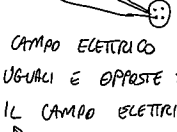
E_A? E_B? PER $x\gtrless 0$, $y\gtrless 0$, $P_0>0$

$\Rightarrow \vec{E}_A = \frac{3\vec{\jmath} - |\vec{\jmath}|^2(0,P_0,0)}{4\pi\varepsilon_0|\vec{\jmath}|^5} = \left(0, -\frac{P_0}{4\pi\varepsilon_0|\vec{\jmath}|^3}, 0\right)$

$\Rightarrow \vec{E}_B = \frac{3(P_0 y)\cdot|y|\hat{y} - P_0 y^2\hat{y}}{4\pi\varepsilon_0|y|^5} = \left(0, \frac{P_0 y}{2\pi\varepsilon_0|y|^4}, 0\right)$



METTO UN DIPOLO IN UN CAMPO ELETTRICO ESTERNO $\rightarrow$
- ENERGIA DIPOLO NEL CAMPO ELETTRICO ESTERNO? U
- FORZA SUL DIPOLO NEL CAMPO ELETTRICO ESTERNO? $\vec{F}$
- HA UN MOMENTO? $\vec{\tau}$



- SE IL CAMPO ELETTRICO È UNIFORME E COSTANTE, AD ESEMPIO UN CONDENSATORE, SONO UGUALI E OPPOSTE $\Rightarrow \vec{F}=0$. MENTRE $\vec{\tau}\neq 0$ PERCHÈ TENDE AD



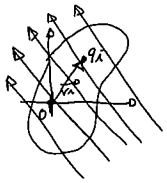
IL DIPOLO NON "SCAPPA VIA" PERCHÈ LE FORZE ALLINEARSI CON IL CAMPO ELETTRICO E QUINDI ANCHE $U\neq 0$

- SE IL CAMPO ELETTRICO NON È UNIFORME



$|\vec{F}_1| > |\vec{F}_2|$ PERCHÈ LE LINEE DI FORZA SONO PIÙ FITTE $\Rightarrow \vec{F}\neq 0$

$\vec{\tau}\neq 0$ (SE NON È GIÀ ALLINEATO)



$U = \sum_i q_i V(\vec{r}_i) \cong \sum_i q_i V(0) + \sum_i q_i(\vec{\nabla}V)\cdot\vec{r}_i = -\left(\sum_i q_i \vec{r}_i\right)\cdot\vec{E}$

IL CAMPO ELETTRICO NON DEVE VARIARE MOLTO, CIOÈ LA SORGENTE È LONTANA $\Rightarrow V(\vec{r}_i) = V(0) + \vec{\nabla}V\cdot\vec{r}_i$

$\Rightarrow \boxed{U = -\vec{P}\cdot\vec{E}_0} = -|\vec{P}||\vec{E}_0|\cos\theta$ $\quad (E_0$ = CAMPO ELETTRICO APPLICATO AL CENTRO DEL DIPOLO)

ENERGIA DI UN DIPOLO ELETTRICO

CONSIDERAZIONI: L'ENERGIA MINIMA SI HA QUANDO IL DIPOLO È PARALLELO AL CAMPO, LA MASSIMA QUANDO È PARALLELO E OPPOSTO AL CAMPO. AD ESEMPIO UNA MOLECOLA D'ACQUA ($|\vec{P}|\simeq 10^{-30}$ C·m) IN UN CAMPO $|\vec{E}| = 10^5$ V/m $\Rightarrow |U(0^\circ) - U(180^\circ)| \simeq 2|\vec{P}||\vec{E}| \simeq 2\cdot 10^{-30}\cdot 10^5$ J $\left(\frac{\text{DIVISO}}{1,6\cdot 10^{-19}}\right)$ $\simeq 10^{-6}$ eV. QUINDI ANCHE IN UN CAMPO ELETTRICO GRANDE, LA MASSIMA DIFFERENZA DI ENERGIA NON È ELEVATA. CIOÈ QUESTO CAMPO NON CE LA FA A IONIZZARE LA MOLECOLA POICHÈ È MOLTO MINORE DELL'eV

MOMENTO DELLE FORZE DI UN DIPOLO ELETTRICO

$\vec{\tau} = \sum_i \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i = \sum_i \vec{r}_i \wedge q_i \vec{E}(\vec{r}_i) \underset{\text{SVILUPPO DI TAYLOR}}{\simeq} \sum_i q_i \vec{r}_i \wedge \left[\vec{E}_0 + \vec{\nabla}\vec{E}\cdot\vec{r}_i\right]$ $\quad \vec{\nabla}\vec{E} = (\vec{\nabla}E_1, \vec{\nabla}E_2, \vec{\nabla}E_3)$ PER OGNI $\vec{r}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{\tau} = \vec{P}\wedge\vec{E}_0}$ $\quad \boxed{|\vec{\tau}| = -\frac{dU}{d\theta}}$

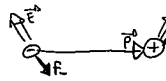
TRASCURABILE

INFATTI QUANDO SONO PARALLELI (EQUILIBRIO STABILE, U_{MIN}) $\Rightarrow \vec{\tau}=0$. MENTRE QUANDO SONO ANTIPARALLELI (EQUILIBRIO INSTABILE, U_{MAX}), $\vec{\tau}$ È SEMPRE 0 MA BASTA POCO PER AVERE MOMENTO MASSIMO

FORZA DI UN DIPOLO $\quad \vec{F} = \sum_i q_i \vec{E}(\vec{r}_i) \rightarrow F_K = \sum_i q_i E_K(\vec{r}_i) \underset{\text{SVILUPPO}}{\simeq} \sum_i q_i\left[E_K(0) + (\vec{\nabla}E_K)\cdot\vec{r}_i\right] = \sum_i q_i E_K(0) + \sum_i (\vec{\nabla}E_K)\cdot(\vec{r}_i q_i) = (\vec{P}\cdot\vec{\nabla})E_K$

SI CALCOLA UNA VOLTA PER TUTTE LE CARICHE

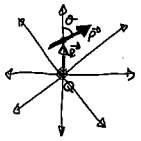
$\Rightarrow \boxed{\vec{F} = (\vec{P}^0\cdot\vec{\nabla})\vec{E}}$ $\quad \boxed{\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{P}^0\cdot\vec{E})} \rightarrow \vec{F} = \left(\frac{d}{dx}(E_x P_x), \frac{d}{dy}(E_y P_y), \frac{d}{dz}(E_z P_z)\right)$



$\Rightarrow \vec{F}_{TOT}$: $\rightarrow$



SE IL DIPOLO FOSSE ORIZZONTALE



$\vec{P} = (P_0\sin\theta, P_0\cos\theta, 0)$, HO UNA CARICA $Q = 1,6\cdot 10^{-19}$ C CHE GENERA IL CAMPO ELETTRICO $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\hat{R} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$

$\Rightarrow \vec{F} = \left(P_0\sin\theta\frac{\partial}{\partial x}, P_0\cos\theta\frac{\partial}{\partial y}, 0\right)\cdot\frac{Q(x,y,z)}{4\pi\varepsilon_0(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$ $\Rightarrow$ PRIMA SI FA LA DERIVATA E POI SI INSERISCONO I VALORI DI $\vec{R} = (0, R, 0)$

3/10

ESE HCl $\quad d \simeq 0,2\,\text{Å} = 2\cdot 10^{-11}$ m $\quad e = 1,6\cdot 10^{-19}$ C $\quad |\vec{P}| = 3,2\cdot 10^{-30}$ C·m



$|\vec{E}| = 10^6$ V/m

$U_{DIPOLO} = -\vec{P}\cdot\vec{E} = -PE\cos\theta = 3,2\cdot 10^{-24}$ J $= \frac{3,2\cdot 10^{-24}}{1,6\cdot 10^{-19}}$ eV $= 2\cdot 10^{-5}$ eV

SE INVECE METTO $|\vec{E}| \simeq 10^{11}$ OTTENGO $U = 2$ eV, QUINDI MAGGIORE DEL LEGAME TRA ELETTRONE E MOLECOLA, ALLORA UN ELETTRONE SI STACCA

$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho_{LIB}}{\varepsilon_0}$ COSA SUCCEDE SE CI METTIAMO NEI MATERIALI ANZICHÈ NEL VUOTO?

MATERIALI SI DIVIDONO IN
- MATERIALI IN CUI LE SOSTANZE SI POLARIZZANO PER MAGNETIZZAZIONE (TUTTI I MATERIALI)
- MATERIALI CHE SI POLARIZZANO, OLTRE ALLA MAGNETIZZAZIONE, ANCHE PER ORIENTAMENTO
- FERRO ELETTRICI (NON TRATTEREMO)

(QUESTA CLASSIFICAZIONE AVVIENE SULLA BASE DI COME SONO FATTE LE MOLECOLE DAL PUNTO DI VISTA DI MOMENTO DI DIPOLO)

- I MATERIALI CHE SI POLARIZZANO PER ORIENTAMENTO HANNO MOMENTO DI DIPOLO ELETTRICO, DELLA SINGOLA MOLECOLA, PERMANENTE. MENTRE IL MOMENTO DI DIPOLO DI UN GRUPPO DI MOLECOLE, HA VALOR MEDIO NULLO. ENTRAMBI I CASI IN ASSENZA DI CAMPO ELETTRICO
- I MATERIALI FERRO ELETTRICI HANNO UN MOMENTO DI DIPOLO ELETTRICO DIVERSO DA 0 PER GRUPPI DI MOLECOLE ANCHE A CAMPO ELETTRICO NULLO
- I MATERIALI CHE SI POLARIZZANO SOLO PER DEFORMAZIONE HANNO MOMENTO DI DIPOLO ELETTRICO NULLO SULLA SINGOLA MOLECOLA

QUESTI AD ESEMPIO SONO TUTTI I GAS NOBILI PERCHÈ IL CENTRO DELLE CARICHE POSITIVE E NEGATIVE COINCIDE

ESEMPIO DI POLARIZZAZIONE PER ORIENTAMENTO: H_2O, HCl $\quad E=0$  $\quad E\neq 0$

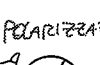
H_2 SI POLARIZZA SOLO PER DEFORMAZIONE, COSÌ COME CH_4, PERCHÈ A $E=0$ SONO MOLECOLE SIMMETRICHE PERCUI NON SI HA MOMENTO DI DIPOLO PERMANENTE

$E=0 \rightarrow$ 

I PROTONI SI SPOSTANO UN PO' A DESTRA, MENTRE LA NUBE ELETTRONICA A SINISTRA $\Rightarrow$ SI CREA MOMENTO DI DIPOLO INDOTTO

FISICA 2

POLARIZZAZIONE PER DEFORMAZIONE



DENSITÀ DI CARICA: $\rho = -\frac{q}{\frac{4}{3}\pi a^3}$ $\quad a \simeq 0{,}5\,\text{Å}$ $\quad E_{EXT} = 10^6\,V/m$

$|\vec{E}^0|$ A DISTANZA R DAL CENTRO $= \frac{q\frac{4}{3}\pi R^3}{\frac{4}{3}\pi a^3 4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R}{a^3}$ → MOMENTO DI DIPOLO INDOTTO

IL PROTONE SARÀ IN EQUILIBRIO SE $|\vec{E}| = |\vec{E}_{EXT}| \Rightarrow \frac{qR}{4\pi\varepsilon_0 a^3} = |\vec{E}^0_{EXT}| \rightsquigarrow qR = 4\pi\varepsilon_0 a^3 |\vec{E}^0_{EXT}| = |\vec{P}^0| \simeq 1{,}4\cdot10^{-35}\,C\cdot m$ (PICCOLO)

ATOMI DEL GAS, OGNUNO DI ESSI NON HA MOMENTO DI DIPOLO INDOTTO $E=0$ ⊗ ⊗ ⊗ $|\vec{P}^0|=0$ PER OGNUNO

$E\neq0$, OGNUNO DI ESSI SI DEFORMA, OGNUNO DI ESSI HA UN PICCOLO MOMENTO DI DIPOLO INDOTTO $\vec{P}^0$ ↑ ↕ ↕ ↕ $\quad |\vec{P}^0| = 4\pi\varepsilon_0 a^3 E_{EST}$

POLARIZZAZIONE DI UNA SOSTANZA = MOMENTO DI DIPOLO INDOTTO TOTALE PER UNITÀ DI VOLUME $\Rightarrow \boxed{\vec{\mathcal{P}} = \frac{d\vec{P}^0_{INDOTTO}}{V}}$ = VETTORE POLARIZZAZIONE (APPROSSIMAZIONE PER IL CASO DI DEFORMAZIONE)

$[\vec{\mathcal{P}}] = \left[\frac{C\,m}{m^3}\right] = \left[\frac{C}{m^2}\right]$ QUINDI HA LA STESSA UNITÀ DI MISURA DELLA DENSITÀ SUPERFICIALE DI CARICA

$\vec{\mathcal{P}}^0 = \vec{\mathcal{P}}(\vec{E}^0) \Rightarrow \boxed{\vec{\mathcal{P}}^0 = \chi(\vec{E}^0)\varepsilon_0\vec{E}^0}$ $\quad \chi$ = SUSCETTIVITÀ ELETTRICA $\quad [\chi] = \left[\frac{F/m\cdot V/m}{C/m^2}\right]$ = ADIMENSIONALE

SE HO LA CONCENTRAZIONE DI MOLECOLE = n $\quad [n] = \frac{\text{MOLECOLE}}{m^3} = \left[\frac{1}{m^3}\right]$ $\quad \chi$? $\Rightarrow \vec{\mathcal{P}}^0 = \frac{[4\pi\varepsilon_0 a^3 \vec{E}^0_{EXT}]\cdot nV}{V} = \chi\varepsilon_0\vec{E}^0$ (DIPOLO INDOTTO DI UNA SINGOLA MOLECOLA)

SE UN OGGETTO SI POLARIZZA PER DEFORMAZIONE DA UN ATOMO SINGOLO, LA SUA SUSCETTIVITÀ: $\chi = 4\pi a^3 n = 4\pi a^3 \left(\frac{\delta(g/cm^3)\ \text{DENSITÀ}}{M_{\text{GRAMMO MOLECOLA}}(g)}\right) N_A$ (N° DI MOL / VOLUME)

$\chi = 4\pi a^3 \frac{\delta}{M} N_A$

ES: H_2 (gas) $\Rightarrow \chi = \frac{12{,}56\cdot0{,}5^3\cdot10^{-30}\cdot10^5\cdot6\cdot10^{23}}{2} \simeq 0{,}4\cdot10^{-4}$ PER QUALUNQUE GAS, χ È DELL'ORDINE DI 10^{-4}. NEL CASO DELL'ARIA, DELL'ORDINE DI 10^{-3}

QUINDI LA POLARIZZAZIONE È UN NUMERO MOLTO PICCOLO, ED È PER QUESTO CHE PER L'ELETTROSTATICA SI PUÒ CONSIDERARE COME IL VUOTO

$\Rightarrow$ TUTTI GLI OGGETTI CHE SI POLARIZZANO SOLO PER DEFORMAZIONE HANNO O COSTANTI DELL'ORDINE DI 10^{-4} SE SONO GAS, O 10^{-1} SE SOLIDI

LA $\chi_{H_2O} = 80$, QUESTO VUOL DIRE CHE L'ACQUA NON SI POLARIZZA PER DEFORMAZIONE

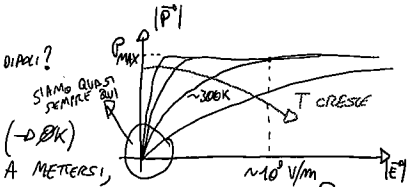
4/10 $\quad \boxed{\vec{\mathcal{P}}^0 = \frac{d\vec{P}^0_{INDOTTO}}{dV} = \chi(\vec{E}^0)\varepsilon_0\vec{E}^0}$ → DEFINIZIONE GENERALE $\quad \chi = \varepsilon_R - 1$

CASO PARTICOLARE: MODELLO DI POLARIZZAZIONE PER DEFORMAZIONE $\Rightarrow \chi = 4\pi a^3 n$ $\begin{cases} \simeq 10^{-1} & \text{SOLIDI/LIQUIDI} \\ \simeq 10^{-4} \div 10^{-5} & \text{GAS} \end{cases}$

POLARIZZAZIONE PER ORIENTAMENTO (PER MOLECOLE POLARI)

$E=0$  $\quad E\neq0$ ↑ 

MA DI QUANTO SONO ORIENTATI I DIPOLI?



AL LIMITE ALLO 0 ASSOLUTO RAGGIUNGE UN VALORE DI SATURAZIONE ($\mathcal{P}_{MAX}$)

QUANDO APPLICO UN CAMPO ELETTRICO A BASSE TEMPERATURE (→ 0K) I DIPOLI, DA FERMI CHE ERANO, COMINCIANO AD OSCILLARE FINO A METTERSI, FERMI, ORIENTATI COME IL CAMPO ELETTRICO → $\mathcal{P}_{MAX}$ ED È UGUALE AL VALORE $P_0 = 3\cdot10^{-30}\ C\cdot m$ $\quad U \simeq P_0 E$

$U_{BRAUNIANO} \simeq KT$ CON $[T]$ = KELVIN E K = COSTANTE DI BOLTZMAN = $\frac{R^{\text{GAS PERFETTI}}}{N_A} = 1{,}34\cdot10^{-23}\ J/K \Rightarrow U^{(\text{T AMBIENTE})}_{BRAUN.} = \frac{1}{40}\,eV = 4\cdot10^{-21}\,J$

- SE, A T AMBIENTE, L'ENERGIA MASSIMA CHE IL DIPOLO POTRÀ AVERE NEL CAMPO ELETTRICO APPLICATO, $P_0E \ll KT \Rightarrow$ L'AGITAZIONE TERMICA "VINCE" CIOÈ GLI OGGETTI CONTINUANO A MUOVERSI SOLO CHE SARANNO UN POCHINO PIÙ ORIENTATI VERSO IL CAMPO ELETTRICO
- SE INVECE L'ENERGIA DEL DIPOLO È GRANDE RISPETTO ALL'AGITAZIONE TERMICA, CIOÈ L'ENERGIA CINETICA È PICCOLA RISPETTO ALL'ENERGIA CHE APPLICO, I DIPOLI SARANNO QUASI SEMPRE ORIENTATI, CIOÈ VICINO ALLA SATURAZIONE

A TEMPERATURA AMBIENTE, QUALI SONO I CAMPI ELETTRICI PER CUI SI CONSIDERA ALTA O BASSA LA TEMPERATURA? CIOÈ QUAL'È IL CAMPO CRITICO PER CUI TUTTI SI ORIENTANO DOPODICHÉ SIAMO ANCORA NELLA REGIONE LINEARE

$\rightarrow |\vec{E}^0| \simeq \frac{KT}{P_0} \simeq \frac{4\cdot10^{-21}\,J}{3\cdot10^{-30}\,C\cdot m} = 1{,}3\cdot10^9\ V/m$ QUINDI A TAMBIENTE SIAMO QUASI SEMPRE NELLA ZONA LINEARE

NON NEL PROGRAMMA

MA QUESTE CURVE SI POSSONO PARAMETRIZZARE? $\rightsquigarrow |\vec{\mathcal{P}}^0| \simeq \mathcal{P}_{MAX}\left(1 - e^{-\frac{P_0E}{KT}}\right) = \begin{cases} \mathcal{P}_{MAX} & \text{SE } P_0E \gg KT \\ \mathcal{P}_{MAX}\left(\chi - \chi + \frac{P_0E}{KT}\right) & \text{SE } P_0E \ll KT \end{cases}$

$\chi = \frac{\mathcal{P}_{MAX}\frac{P_0E}{KT}}{\varepsilon_0 E} = \mathcal{P}_{MAX}\left(\frac{P_0}{KT\varepsilon_0}\right) = P_0 n \left(\frac{P_0}{KT\varepsilon_0}\right) \overset{\text{GAS PERFETTO}}{=} \frac{3\cdot10^{-30}\cdot\frac{6\cdot10^{23}}{22{,}4\cdot10^{-3}}}{4\cdot10^{-21}\cdot8{,}85\cdot10^{-12}} \left(\frac{C/m^2}{}\right) \simeq 10^{-2}$ PER UN GAS A TeP NORMALI $\left(\begin{matrix}273\ K \\ 1\ atm\end{matrix}\right)$

SE AVESSI UN LIQUIDO $\simeq 10$

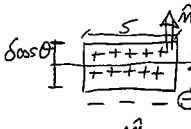
SE OTTENGO UNA SUSCETTIVITÀ INTERMEDIA TRA IL CASO DI DEFORMAZIONE E DI ORIENTAMENTO (AD ESEMPIO $\chi \simeq 1$ PER LIQUIDO), COME SI CAPISCE SE È POLARE O NO? UN MODO SICURO È FARE I SOLITI CONTI VARIANDO LA TEMPERATURA. SE CAMBIANDO LA TEMPERATURA χ RESTA INVARIATA, ALLORA È SICURAMENTE UNA POLARIZZAZIONE PER DEFORMAZIONE; SE INVECE ABBASSANDO LA TEMPERATURA, LA χ AUMENTA → IL MEZZO È POLARE



SE QUESTO OGGETTO LO METTO IN UN CAMPO ESTERNO, QUESTO SI POLARIZZA. IPOTIZZIAMO CHE QUESTO DIELETTRICO STA INIZIALMENTE SCARICO

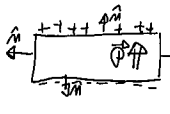
SE LA MOLECOLA È POLARE, LE CARICHE POSITIVE SI ORIENTANO COME IL CAMPO E SONO UN POCHINO AL DI FUORI DELLA SUPERFICIE SUPERIORE E ANALOGAMENTE CON QUELLE NEGATIVE. PER CUI AVRÒ DA UN LATO CARICA SUPERFICIALE POSITIVA E DALL'ALTRO NEGATIVA

CHE RELAZIONE C'È TRA LA CARICA DI POLARIZZAZIONE E IL VETTORE DI POLARIZZAZIONE DELLA SOSTANZA, CHE È $\chi\varepsilon\vec{E}^0$?



SUPERFICIE $\Rightarrow$ CARICA TOTALE: $Q = qn\,S\,\delta\cos\theta$ $\quad \sigma_{POL} = \frac{Q}{S} = qn\,\delta\cos\theta$

$\Rightarrow \boxed{\sigma_{POL} = |\vec{\mathcal{P}}|\cos\theta = \vec{\mathcal{P}}^0\cdot\hat{n}}$ CARICHE DI POLARIZZAZIONE ALLA SUPERFICIE DI UN DIELETTRICO



SULLE SUPERFICI LATERALI → $\sigma_{POL} = 0$

SOPRA $\vec{\mathcal{P}}\cdot\hat{n} > 0 \rightarrow \sigma_{POL} > 0$

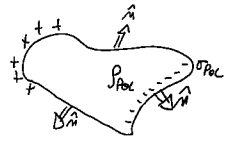
SOTTO $\vec{\mathcal{P}}\cdot\hat{n} < 0 \rightarrow \sigma_{POL} < 0$

MOMENTO DIPOLO ELETTRICO SUL SINGOLO DIPOLO $= q\delta$

$nq\delta = |\vec{\mathcal{P}}|$



FISICA 2



LA CARICA DI POLARIZZAZIONE STARÀ SOLO ALLA SUPERFICIE, QUANDO LE CARICHE SI SEPARANO, OPPURE NO?

→ SE METTO UN CAMPO UNIFORME LA CARICA DI POLARIZZAZIONE È SOLO SUPERFICIALE E ALL'INTERNO DEL DIELETTRICO RESTA SCARICO

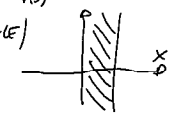
→ SE IL CAMPO NON FOSSE UNIFORME (AD ESEMPIO UNA SORGENTE IN UN PUNTO VICINA A UNA SUPERFICIE E LONTANA ALLA SUPERFICIE OPPOSTA), ALL'INTERNO ALLORA ESISTE UNA ZONA DOVE IL CAMPO È DISOMOGENEO IN CUI, FORSE, SI CREANO DELLE CARICHE DI POLARIZZAZIONE

$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho_{TOT}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_{POL}+\rho_{LIB}}{\varepsilon_0}$ $\quad \vec{P} = \chi\varepsilon_0\vec{E}$ $\quad \sigma_{POL} = \vec{P}\cdot\hat{n}$

SE IL DIELETTRICO È SCARICO, POTREI AVERE ρ_{POL} ALL'INTERNO DEL VOLUME E σ_{POL} ALLA SUPERFICIE $\Rightarrow Q_{POL_{TOT}} = 0 = \int_{S(V)} \sigma_{POL}\,dA + \int_{V(S)} \rho_{POL}\,dV$

$0 = \int_{S(V)} \vec{P}\cdot\hat{n}\,dA + \int_{V(S)} \rho_{POL}\,dV \xrightarrow{\text{TEOREMA DI GAUSS}} 0 = \int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{P}\,dV + \int_{V(S)} \rho_{POL}\,dV \to 0 = \int_V (\vec{\nabla}\cdot\vec{P} + \rho_{POL})\,dV \Rightarrow \boxed{\rho_{POL} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P}}$

(CASO UNIDIMENSIONALE)



$\rho_{POL} = -\frac{d}{dx}P_x = -\varepsilon_0\frac{d}{dx}(\chi E_x)$ SE LA SUSCETTIVITÀ ELETTRICA VARIA, LÌ DOVE VARIA C'È UNA CARICA DI POLARIZZAZIONE

UNA VARIAZIONE (ISTANTANEA, DISCONTINUA) DELLA χ SI HA SULLA SUPERFICIE, QUINDI PORTA A UNA CARICA SUPERFICIALE

$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho_{LIB}}{\varepsilon_0} + \frac{-\vec{\nabla}\cdot\vec{P}}{\varepsilon_0} \to \varepsilon_0\vec{\nabla}\cdot\vec{E} + \vec{\nabla}\cdot\vec{P} = \rho_{LIB} \to \rho_{LIB} = \vec{\nabla}\cdot(\varepsilon_0\vec{E} + \vec{P})$ ORA DEFINISCO UN VETTORE DI INDUZIONE ELETTRICA $\vec{D}$

$\boxed{\vec{D} \triangleq \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}}$, QUINDI SI ARRIVA ALLA EQUAZIONE DI MAXWELL NELLA FORMA FINALE $\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho_{LIB}}$

QUESTA VALE SE SI IPOTIZZA DOVE STANNO LE CARICHE LIBERE. PER CAPIRE IL CAMPO ELETTRICO (INCOGNITA PRIMARIA), DEVO CALCOLARE SIA $\vec{D}$ E $\vec{P} = \vec{P}(\vec{E})$

CASO PARTICOLARE → DIELETTRICI LINEARE $\Rightarrow \vec{P} = \chi\varepsilon_0\vec{E}$ DOVE χ DIPENDE SOLO DALLA POSIZIONE E NON DAL CAMPO ELETTRICO

→ DIELETTRICI OMOGENEI $\Rightarrow \chi$ NON DIPENDE NEANCHE DALLA POSIZIONE, MA È UNA COSTANTE ALL'INTERNO DEL DIELETTRICO

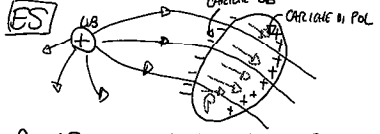
↳ $\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \chi\varepsilon_0\vec{E} = \varepsilon_0\vec{E}(1+\chi) = \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}}$ POICHÉ $\chi = \varepsilon_R - 1$ (COSTANTE DIELETTRICA)

CONSIDERAZIONI → $[\vec{P}] = C/m^2$ $\quad [\vec{E}] = V/m = N/C$ $\quad [\vec{D}] = C/m^2$

$\Phi_{S_{CHIUSA}}(\vec{E}) = \frac{Q_{INT\,TOT}}{\varepsilon_0}$ $\quad \Phi_S(\vec{D}) = Q_{LIB\,INT}$ $\quad \Phi_S(\vec{P}) = -Q_{POL\,INT}$

$\vec{\nabla}\cdot\vec{P} = -\rho_{POL}$
$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho_{LIB}$
$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho_{TOT}}{\varepsilon_0}$

ES



$\Rightarrow$ LE LINEE DI FORZA DELLA POLARIZZAZIONE NASCANO DA CARICHE NEGATIVE E MUOIONO IN CARICHE POSITIVE

$\Rightarrow$ LE LINEE DI FORZA DEL VETTORE $\vec{D}$ NASCONO DALLE POSITIVE E MUOIONO NELLE NEGATIVE

DIELETTRICO LINEARE e OMOGENEO

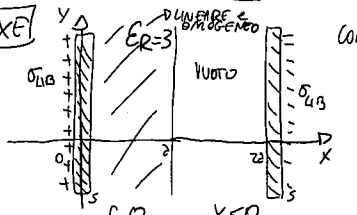
$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho_{LIB} \to \vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \vec{\nabla}\cdot(\varepsilon\vec{E} + \vec{P})$ $\quad$ SE È VERO $\quad \varepsilon_0\vec{\nabla}\cdot\vec{E} + \vec{\nabla}\cdot\vec{P} = \frac{1}{\varepsilon_R}\vec{\nabla}\cdot\vec{D} + \vec{\nabla}\cdot\vec{P}$ ($\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho_{LIB}$, $\vec{\nabla}\cdot\vec{P} = -\rho_{POL}$) $\quad$ PERCHÉ $\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \varepsilon_R\varepsilon_0\vec{\nabla}\cdot\vec{E}$

$\Rightarrow \rho_{LIB} = \frac{\rho_{LIB}}{\varepsilon_R} - \rho_{POL} \to \boxed{\rho_{POL} = -\rho_{LIB} + \frac{\rho_{LIB}}{\varepsilon_R} = \rho_{LIB}\frac{1-\varepsilon_R}{\varepsilon_R} = -\frac{\chi}{\varepsilon_R}\rho_{LIB}}$

QUINDI SE NON CI SONO CARICHE LIBERE, RESTA SCARICO → $\rho_{POL} = \cancel{\emptyset}$

SE NON È OMOGENEO NON VALE, C'È ρ_{POL}

EXE



CONDENSATORE CON PIASTRE DI AREA S MESSE A DISTANZA $2d \ll$ DIMENSIONI $\Rightarrow$ SIMMETRIA PIANA $\{\vec{D}, \vec{P}, \vec{E}$ HANNO SOLO COMPONENTE X

σ_{LIB} DATO DEL PROBLEMA

TROVARE D_x, P_x, E_x, $\Delta V = V(0) - V(2d)$, σ_{POL}, ρ_{POL} ?

→ IL DIELETTRICO È SCARICO, OMOGENEO $\Rightarrow$ SE IL CAMPO ELETTRICO ALL'INTERNO VARIA CON X, ALLORA CI SARÀ ρ_{POL} ALTRIMENTI NO

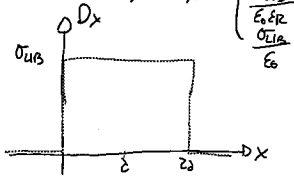
IL FLUSSO DI $\vec{D}$ ATTRAVERSO UNA QUALUNQUE SUPERFICIE CHIUSA È PARI SOLTANTO ALLA CARICA LIBERA ALL'INTERNO SE IL DIELETTRICO NON CI FOSSE

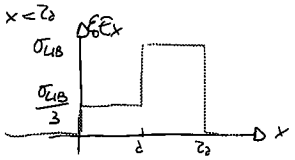
$\Rightarrow D_x = \begin{cases} 0 & x<0 \\ \sigma_{LIB} & 0<x<2d \\ \sigma_{LIB} & 2d<x<2d_2 \\ 0 & x>2d_2 \end{cases}$

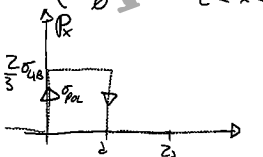
LE LINEE DI FORZE DI $\vec{D}$ PARTONO DALLE CARICHE POSITIVE LIBERE E TERMINANO SULLE CARICHE NEGATIVE LIBERE

$\Rightarrow \vec{D}$ NON HA DISCONTINUITÀ IN $x=2d$ POICHÉ NON C'È CARICA LIBERA

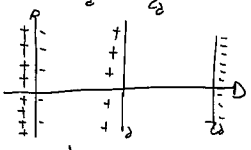
$\vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon_R\vec{E} \Rightarrow E_x = \begin{cases} 0 & x<0,\ x>2d_2 \\ \frac{\sigma_{LIB}}{\varepsilon_0\varepsilon_R} & 0<x<2d \\ \frac{\sigma_{LIB}}{\varepsilon_0} & 2d<x<2d_2 \end{cases}$ $\quad \vec{P} = \chi\varepsilon_0\vec{E} \Rightarrow P_x = \begin{cases} 0 & x<0,\ x>2d_2 \\ \frac{\sigma_{LIB}}{\varepsilon_R}(\varepsilon_R - 1) & 0<x<2d \\ \emptyset & 2d<x<2d_2 \end{cases}$ ← NEL VUOTO LA SUSCETTIVITÀ È NULLA







LA CARICA DI POLARIZZAZIONE: $\sigma_{POL} = \vec{P}\cdot\hat{n}$ (DISCONTINUITÀ DELLA POLARIZZAZIONE) $\Rightarrow \begin{cases} -\frac{2}{3}\sigma_{LIB} & x=0 \\ +\frac{2}{3}\sigma_{LIB} & x=2d \end{cases}$



QUINDI IL CAMPO ELETTRICO IN $x=0$ HA UN SALTO PARI ALLA CARICA LIBERA CHE C'È, MA È COSTITUITO ANCHE ALLE CARICHE DI POLARIZZAZIONE $(-\frac{2}{3}\sigma_{LIB})$ $\Rightarrow$ SALE SOLO DI $\frac{1}{3}$. POI IN $x=2d$ FA UN ALTRO SALTO, POI CALA TUTTE LE CARICHE LIBERE