CHECKLIST

FISICA II prof. G. Batignani
Appunti di Vincent Leone

1) Prerequisiti di matematica

1.1) Def. prodotto scalare tra 2 vettori: $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cos(\alpha)$ α = angolo tra $\vec{v}$ e $\vec{w}$

1.2) Calcolare $\langle (1;0;2)(2;0;1) \rangle$: $2+0+2=4$

1.3) Def. prodotto vettoriale tra 2 vettori: $\vec{v} \wedge \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \text{sen}(\alpha)$

1.4) Calcolare $(1;0;2) \wedge (2;0;1)$: $\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (0; +3; 0)$

1.5) Sviluppo di Taylor con precisione del 2% di $\frac{1}{1+0,05}$, $\frac{1}{1+(0,1)^2}$, $e^{0,05}$, $\cos 0,95$

$\frac{1}{1+0,05} \cong (1 \mp 0,05)$ $\quad \frac{1}{1+(0,1)^2} \cong 1$ $\quad e^{0,05} \cong 1+0,05$ $\quad \cos(0,95) \cong 1$

1.6) Def. di gradiente $\vec{\nabla}$ in coordinate cartesiane: è il vettore che ha come componenti le derivate parziali di una funzione

1.7) Def. di divergenza $(\vec{\nabla} \cdot \vec{A})$ in coordinate cartesiane: misura la tendenza di un campo vettoriale a divergere o a convergere verso un pto dello spazio.

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial z} \right)$$

1.8) Esprimere l'operatore "divergenza" in coordinate polari sferiche nel caso di campi con simmetria sferica: $(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = \frac{1}{R^2} \frac{\partial (R^2 \cdot E_r)}{\partial R}$

1.9) Esprimere l'operatore "divergenza" in coordinate cilindriche nel caso di campi con simmetria cilindrica: $(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = \frac{1}{r} \frac{\partial (r E_r)}{\partial r}$

1.10) Dare la def. di rotore di un vettore $(\vec{\nabla} \wedge \vec{A})$ in coordinate cartesiane: $\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$

1.11) Def. di laplaciano $(\vec{\nabla}^2)$ in coord. cartesiane: è la DIVERGENZA del GRADIENTE.

1.12) Esprimere l'operatore laplaciano in coordinate polari sferiche nel caso di campi con simmetria sferica: $\vec{E} = -\vec{\nabla}\vec{\varphi} \Rightarrow \Delta\varphi = (-\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = -\frac{1}{R^2} \frac{\partial (R^2 \cdot E_r)}{\partial R}$

1.13) Esprimere l'operatore laplaciano in coordinate polari cilindriche nel caso di campi con simmetrica cilindrica: $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi \Rightarrow \Delta\varphi = (-\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = -\frac{1}{r} \frac{\partial (r E_r)}{\partial r}$

1.14) Enunciare il teorema della divergenza (TEOREMA di GAUSS).

Il flusso di un vettore attraverso una superficie chiusa è uguale alla divergenza del vettore integrata nel volume racchiuso dalla superficie:

$$\int_{S(V)} \vec{A} \cdot \vec{n}\, dA = \int_{V(S)} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \cdot dV$$

1.15) Enunciare il teorema del rotore (TEOREMA di STOKES).

Il flusso del rotore di un campo vettoriale attraverso una superficie è uguale alla circuitazione del campo lungo il bordo della superficie stessa:

$$\int_S \text{rot}\, \vec{E} \cdot \vec{n}\, dA = \int_{\partial S} \vec{E} \cdot \vec{\tau}\, ds.$$

1.16) Definire un n° complesso, la sua parte reale e la sua parte immaginaria:

$z = a + ib = \rho(\cos\vartheta + i \,\text{sen}\vartheta) = \rho e^{i\vartheta}$ $\quad e^{i\vartheta} = \cos\vartheta + i \,\text{sen}\vartheta$ $\quad (\mathbb{R}e + \mathbb{I}m)$

1.17) Trovare la soluz. dell'eq. diff. $\dot{x} + \gamma x = C$ con $x(0) = x_0$.

$x(t) = A e^{-\gamma t} + \frac{C}{\gamma} \Rightarrow x(0) = x_0 = A + \frac{C}{\gamma} \Rightarrow A = x_0 - \frac{C}{\gamma} \Rightarrow x(t) = x_0 e^{-\gamma t} + \frac{C}{\gamma}(1 - e^{-\gamma t})$

1.18) Trovare la soluz. dell'eq. diff. $\ddot{x} + x\omega_0^2 = C$ con $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = V_0$

$x(t) = A \,\text{sen}(\omega_0 t) + B \cos(\omega_0 t) + \frac{C}{\omega_0^2} \Rightarrow x(0) = x_0 = B + \frac{C}{\omega_0^2} \Rightarrow B = x_0 - \frac{C}{\omega_0^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dot{x}(0) = V_0 = \omega_0 A \Rightarrow A = \frac{V_0}{\omega_0} \Rightarrow \frac{V_0}{\omega_0} \text{sen}(\omega t) + x_0 \cos\omega t + \frac{C}{\omega_0}(1 - \cos\omega t)$

2) Prerequisiti meccanica

2.1) Espressione attrito viscoso: $\vec{F}_B = -\beta\vec{v}$

2.2) Espressione forza elastica: $\vec{F}_{el} = -k\Delta\vec{x}$

2.3) Definizione pressione esercitata su una sup. piana: $P = F_\perp / S$ (forza per unità di superficie)

2.4) II principio della meccanica in un sistema inerziale: $\sum \vec{F} = m\vec{a}$

2.5) " " " " " " " " non inerziale: $\sum \vec{F} = m(\vec{a}' + \vec{a}_T) \Rightarrow m\vec{a}' = \sum \vec{F} - m\vec{a}_T$ (apparente)

2.6) Quantità di moto di un sistema: $\vec{P} = M \cdot \vec{V}_{CM} = \sum_i m_i \vec{v}_i$ $\quad \vec{P}(t) - \vec{P}(t_0) = \int_{t_0}^{t} \vec{F}_{est}(t')\,dt'$

2.7) I eq. cardinale della meccanica: $M\vec{a}_{CM} = \sum \vec{F}_{est}$

2.8) Dimostrare che un punto materiale soggetto ad una forza elastica compie un moto armonico: $\vec{F} = m\vec{a} = -k\Delta\vec{x} \Rightarrow m\ddot{x} = -k(x - l)$

$\Rightarrow \quad x(t) = A\cos(\omega t) + B(\text{sen}(\omega t)) + C$ con $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ e $C = l$

2.9) Dimostrare che un punto materiale soggetto a una forza di attrito viscoso compie un moto smorzato esponenzialmente: $\vec{F} = m\vec{a} = -\beta\vec{v} \Rightarrow m\ddot{x} = -\beta\dot{x} \Rightarrow m\dot{v} = -\beta v$

$\Rightarrow \quad v(t) = A \cdot e^{-\frac{\beta}{m}t}$

2.10) Dimostrare che un punto mat. soggetto a una f. di attrito viscoso e a una f. costante raggiunge una V_{lim}

$\vec{F} = -(\beta\vec{v} + k) = m\vec{a} \Rightarrow m\ddot{x} + \beta\dot{x} = -k$ $\quad V_{LIM} = \dot{x}_{lim}$ per $\ddot{x} = 0$ $\quad V_{LIM} = -\frac{k}{\beta}$

2.11) Def. di Lavoro di una forza: $L = \vec{F} \cdot \vec{\ell}$ $\quad L_{\vec{r}_0 \to \vec{r}_1} = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}$

2.12) Def. di Potenza sviluppata da una forza: $P = \frac{dL}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$ (2.13)

2.14) Def. En. cinetica di un sistema: $K = \sum_i K_i = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$

2.15) Teorema delle forze vive: La variazione di en. cinetica di un sistema è uguale al lavoro di tutte le forze. $L_{TOT} = K_{fin} - K_{in}$

2.16) Forza conservativa: forza in cui il lavoro non dipende dal percorso scelto ma solo dagli estremi (Forze centrali)

2.17) Def: · CAMPO DI FORZA: insieme di vettori che una grandezza fisica assume in una certa regione dello spazio

· LINEA DI FORZA: linea formata dall'inviluppo delle direzioni della forza nella regione del campo. La direz. della forza è sempre tang. alla l. di f.

2.20) I delle sup. eq. pot. Sup equipotenziale: sup. ⊥ in ogni pto alle direz. delle linee di forza

2.18) Diff. di energia potenziale: $\Delta U = -L_{\vec{r}_0 \to \vec{r}} = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}\,d\vec{r}$ (per f. conservative) 2.19)

2.22) En. potenziale elettrostatico: $U_e(R) = -L_{\vec{F}_e} = +\frac{qQ_i}{4\pi\varepsilon_0 R} + \text{costante}$

2.23) En. pot. elastico: $U_{el}(x) = -L_{el} = \frac{k}{2}(x - l_0)^2 + \text{costante}$

2.24) En. meccanica: $E = K + U$ $\quad E_f - E_i = L_{non\ cons}$ 2.25)

2.26) Momento di una forza: $\vec{\tau} = \vec{R} \wedge \vec{F}$ rispetto a un polo o con $\vec{R} = (O\vec{P})$

2.27) Momento angolare: $\vec{L}_O = \vec{R} \wedge m\vec{V} = \vec{R} \wedge \vec{P}$

2.28) II eq. cardinale per un pto cardinale: $\vec{\tau}_{tot} = \frac{d\vec{L}_O}{dt}$

2.29) La variazione del momento angolare di un punto materiale è pari alla somma dei momenti agenti sul punto materiale

2.30) Quando vale la conservazione del momento angolare di un sistema? $\vec{\tau}_{tot} = 0$

master COPY

3) Elettrostatica e dielettrici

3.1) Scrivere l'espressione della forza elettrostatica fra 2 cariche puntiformi (Legge di Coulomb): $\vec{F_c} = \sum \frac{q_i q}{4\pi\varepsilon_0 R_i^2}\hat{R}$ $\vec{F_c} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\hat{r}$

3.2) Quanto vale il valore numerico di ε_0 (cost. diel. nel vuoto)? $8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \frac{C^2}{N \cdot m^2}$

3.3) Cosa significa dire che "la carica elettrica è quantizzata" e quale è il valore numerico della carica elettrica elementare? Significa che la carica deve necessariamente assumere valori multipli di $e = -1{,}602 \cdot 10^{-19}\,C$.

3.4) Sotto quali condizioni un elettrone compie un moto circolare uniforme attorno a una carica positiva (forma)? $F = \frac{ke^2}{R^2} = ma = m\left(\frac{v^2}{R}\right)$ acc. centr.

3.5) Def. densità di carica · di volume $\rho = \frac{dQ}{dV}$ · di superficie $\sigma = \frac{dQ}{dA}$ · lineare $\lambda = \frac{dQ}{dl}$

3.6) Def. operativa di campo elettrico e la sua unità di misura: $\sum \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 R_i^2}\hat{R_i} = \int \frac{\hat{r}}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}$ $\left[\frac{N}{C}\right]$ 3.7) e 3.8)

3.9) Linee di forza del campo elettrico statico: · non sono mai chiuse · non si intersecano · sono + fitte dove il campo è + intenso · partono da ⊕ e arrivano a ⊖

3.10) Come sono disposte linee di forza e sup. eq. potenziali del campo di una carica punti. 3.11) forma positiva? ⊥. Se fosse negativa? ⊥.

3.12) Definizione del flusso del campo elettrico. $\Phi_S(\vec{E}) = \int_S \vec{E}\cdot d\vec{A} \rightarrow \hat{n}\,dA$

3.13) Legge di Gauss: il flusso del campo E attraverso una superficie chiusa è pari alla somma delle cariche racchiuse nella sup. divisa per ε_0.

3.14) Quanto vale $\vec{E}$ appena fuori da un conduttore? $\vec{E}(\vec{x}) = \frac{\sigma(\vec{x})}{\varepsilon_0}\hat{n}(\vec{x})$

3.15) Quanto vale la circuitazione del campo elettrico statico su una qualunque linea chiusa? $\oint_\gamma \vec{E_{ce}}\cdot d\vec{l} = \oint_\gamma \vec{E_{ce}}\, q\cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow \oint_\gamma \vec{E}\,dl = 0$

3.16) Dare la def. di differenza di potenziale elettrica: $\Delta V = -\int_{R_1}^{R_2} \vec{E_{ce}}\cdot d\vec{l}$ [V] 3.17) $\Delta V = \Delta V_{ce}/q$

3.18) Come si ricava il campo elettrico se è nota la funzione pot. elettrico? $-\vec{\nabla}\Phi = \vec{E}$ $\left(\vec{E} = \left(-\frac{\partial V}{\partial x}; -\frac{\partial V}{\partial y}; -\frac{\partial V}{\partial z}\right)\right) = -\vec{\nabla}\cdot V$ 3.19) 3.20)

3.21) Che cos'è un condensatore? Def. di capacità di un condensatore.
È un sistema di 2 conduttori con cariche uguali e opposte, generalmente di equati armature. $C = Q/\Delta V$ $[F]$ 3.22)
La capacità è il rapporto tra la carica Q che si accumula su ciascuna delle 2 piastre del condensatore e la diff. di potenziale ΔV tra le 2 piastre.

3.23) Quanto vale la capacità di un condensatore piano riempito di un materiale, se è nota la costante dielettrica relativa del mezzo, la superficie e la dist. tra le 2 piastre? $C = \varepsilon_0\varepsilon_r\frac{A}{d}$

3.24) Dimostrare la legge per la divergenza del campo elettrico nel vuoto a partire dalla legge di Gauss per il campo elettrico.
$$\Phi_S(\vec{E}) = \int_{S(V)} \vec{E}\,\hat{n}\,dA = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \int_{V(S)} \frac{\rho}{\varepsilon_0}dv = \int_{V(S)} \mathrm{div}\vec{E}\cdot dv \Rightarrow \boxed{\frac{\rho}{\varepsilon_0} = \vec{\nabla}\cdot\vec{E}}$$

3.25) Dimostrare l'equazione di Poisson per il potenziale elettrico statico.
Il laplaciano del potenziale elettrico è = alla densità totale di carica elettrica, divisa per ε_0 e cambiata di segno.
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \vec{\nabla}\cdot(-\vec{\nabla}\Phi) = -\Delta\Phi = \frac{\rho_{tot}}{\varepsilon_0}$$
$$-\Delta\Psi = \vec{\nabla}\cdot(-\vec{\nabla}\Psi) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z}\right)\begin{pmatrix}-\frac{\partial\Psi}{\partial x}\\ -\frac{\partial\Psi}{\partial y}\\ -\frac{\partial\Psi}{\partial z}\end{pmatrix} = -\Delta\Psi \Rightarrow \Delta\Psi = -\frac{\rho_{tot}}{\varepsilon_0}$$
↳ $\mathrm{div}(-\vec{E}) = -\frac{\rho_{tot}}{\varepsilon_0}$

3.26) Quali sono le condizioni al contorno sufficienti e necessarie per poter risolvere l'eq. di Poisson in un sistema di conduttori e cariche?
Conoscere la posizione di tutte le cariche o conoscere i potenziali elettrici su tutti i conduttori o un mix delle 2 cose.

3.27) Eq. di Poisson:
- SIMMETRIA PIANA: $\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow \Phi = A + Bx \Rightarrow E_x = -B$
- SIMMETRIA CILINDRICA: $\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) = 0 \Rightarrow \Phi = A + B\ln r \rightarrow E_r = -\frac{B}{r}$
- SIMMETRIA SFERICA: $\frac{1}{R^2}\cdot\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial\Phi}{\partial R}\right) = 0 \rightarrow \Phi = \frac{A}{R} + B \Rightarrow E_R = -\frac{A}{R^2}$

3.29) Qual è il significato della costante di Planck? Qual è il suo valore numerico?
La costante di Planck rappresenta l'azione minima possibile, serve a quantizzare l'energia e vale $\sim 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ J·s

3.30) In quali condizioni non sono più valide le leggi della fisica classica, e si deve ricorrere alla meccanica quantistica? Per velocità prossime a quella della luce (relativistica) → Nella trattazione di onde e particelle microscopiche.

3.32) Come è definito l'eV e quanti eV sono contenuti in un Joule?
È il lavoro compiuto da un elettrone per attraversare una differenza di potenziale di 1 volt. $1\,eV = 1\,\frac{J}{C} \cdot (1{,}602 \cdot 10^{-19})\,C = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,J$ $\quad \frac{1}{1{,}6 \cdot 10^{-19}}\,J = m^0$

3.34) Dare la definizione di dipolo elettrico e fare qualche esempio di dipoli elettrici. (HCO)
È un sistema composto da 2 cariche elettriche uguali e di segno opposto, separate da una distanza costante nel tempo. $\vec{p_e} = \sum_{i=1}^{n} q_i \cdot \vec{R_i}$

3.35) Calcolare il potenziale elettrico generato da un dipolo elettrico a grande distanza.
$\vec{P_{ee}} = \sum_{q_i>0} q_i \vec{R_i} - \sum_{q_i<0} q_i \vec{R_i}$.

$$\varphi(\vec{R}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{R} - \vec{\delta}/2|} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{R} + \vec{\delta}/2|} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{R^2 - \vec{R}\delta\cos\theta}} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{R^2 + \vec{R}\delta\cos\theta}} \quad \text{(trascurabili)}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}\left[\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(\vec{R}\cdot\vec{\delta})}{R^2}}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{(\vec{R}\cdot\vec{\delta})}{R^2}}}\right] \to (1+x)^n \cong 1 + nx \Rightarrow \sqrt{1+x} \cong 1 + \frac{x}{2} \to \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}\left[\frac{1}{1 - \frac{\vec{R}\vec{\delta}}{2R^2}} - \frac{1}{1 + \frac{\vec{R}\vec{\delta}}{2R^2}}\right] =$$

$$\to \frac{1}{1+x} \sim 1 - x \to \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}\left[1 + \frac{\vec{R}\cdot\vec{\delta}}{2R^2} - 1 + \frac{\vec{R}\vec{\delta}}{2R^2}\right] = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}\left[\frac{(\vec{R}\cdot\vec{\delta})}{R^2}\right] = \frac{Q(\vec{\delta}\cdot\vec{R})}{4\pi\varepsilon_0 R^3} = \boxed{\frac{\vec{P_e}\cdot\vec{R}}{4\pi\varepsilon_0 R^3}}$$

(A GRANDI DISTANZE $\phi(x,y,z) \propto \frac{1}{R^2}$)

3.36) Calcolare il campo elettrico generato da un dipolo elettrico a grande distanza e disegnarne le linee di forza.
$\vec{E}$ si ricava come $-\nabla\varphi$ $\quad \vec{E}(\vec{R}) = -\vec{\nabla}\varphi(\vec{R}) = -\vec{\nabla}\left(\frac{\vec{p_e}\cdot\vec{R}}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\right)$ $\quad \vec{R} = (x,y,z)$ $\quad R^3 = (x^2+y^2+z^2)^{3/2}$

$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\vec{\nabla}\left(\frac{p_{ex}x + p_{ey}y + p_{ez}z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)$ ricavo una componente per volta, trattando come costanti le altre 2

$$E_x = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p_{ex}x + p_{ey}y + p_{ez}z}{R^3}\right) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left(p_{ex}R^{-3} - (\vec{p_e}\cdot\vec{R})\cdot 3R^{-5}\cdot\frac{2x}{2R}\right) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(p_{ex}R^{-2} - \frac{(\vec{p_e}\cdot\vec{R})\cdot 3x}{R^5}\right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3(\vec{p_e}\cdot\vec{R})x - p_{ex}R^2}{R^5}$$ quindi: $\vec{E}(\vec{R}) = (E_x, E_y, E_z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3(\vec{p_e}\cdot\vec{R})}{R^5}(x,y,z) - \frac{R^2}{R^5}(p_{ex}, p_{ey}, p_{ez})\right] =$

(A GRANDI DISTANZE $|\vec{E}| \sim 1/R^3$) $\quad = \boxed{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3(\vec{p_e}\cdot\vec{R})\vec{R} - R^2\vec{p_e}}{R^5}}$

3.37) Calcolare l'espressione dell'energia potenziale di un dipolo elettrico in un campo elettrico esterno.
L'energia di una coppia di cariche è $W = q_+\varphi_+ + q_-\varphi_- = q(\varphi_+ - \varphi_-)$ dove φ_+ e φ_- sono i potenziali nei punti occupati dalle cariche del dipolo $+q$ e $-q$.
Approssimando al primo ordine (l è piccola), si ottiene: $\boxed{\varphi_+ - \varphi_- = \frac{\partial\varphi}{\partial l}\,l}$
dove $\partial\varphi/\partial l$ è la derivata del potenziale nella direzione del vettore $\vec{E}$.

Poiché $\frac{\partial\varphi}{\partial l} = -E_l \overset{(a)}{\Rightarrow} \varphi_+ - \varphi_- = -E_l\cdot l \overset{(a)}{=} -\vec{E}\cdot\vec{l} \Rightarrow \boxed{W = -\vec{p}\cdot\vec{E}}$ segue che minimo si ha per: $\vec{p} \uparrow\uparrow \vec{E}$

3.38) Calcolare l'espressione della forza su un dipolo elettrico in un campo elettrico esterno. Equilibrio STABILE

$\vec{F} = q\vec{E_+} + q\vec{E_-} = q(\vec{E_+} - \vec{E_-})$ incremento lungo il segmento l, approssimando $\Delta\vec{E} = \vec{E_+} - \vec{E_-} = \frac{\Delta\vec{E}}{l}l = \frac{\partial\vec{E}}{\partial l}l$
La forza agente sul dipolo diventa: $\boxed{\vec{F} = \vec{p}\frac{\partial\vec{E}}{\partial l}}$ $\quad p = ql$ (momento di dipolo) $\quad \frac{\partial\vec{E}}{\partial l}$ derivata direzionale del vettore

3.39) Calcolare l'espressione del momento delle forze su un dipolo elettrico in un campo elettrico esterno.
Il momento risultante delle forze agenti su un dipolo rispetto al suo centro C è uguale a: $\vec{M} = \vec{r_+}\wedge\vec{F_+} + \vec{r_-}\wedge\vec{F_-} = \vec{r_+}\wedge q\vec{E_+} - \vec{r_-}\wedge q\vec{E_-}$ $\quad E_+ \cong E_-$ e $\vec{M} = [\vec{r_+} - \vec{r_-}]\times q\vec{E}$,
tenendo conto del fatto che $\vec{r_+} - \vec{r_-} = \vec{l}$ si ottiene:

$$\boxed{\vec{M} = \vec{p}\wedge\vec{E}}$$

3.40) Spiegare il meccanismo di polarizzazione per orientamento, indicando l'andamento qualitativo del del dipolo elettrico indotto in funzione della temperatura.
La polarizzazione per orientamento avviene in presenza di materiali dielettrici polari. La polarizzabilità di una sostanza dipende dalla temperatura. In particolare la distribuzione di Boltzmann descrive la probabilità di misurare un costituente di un sistema a una data ENERGIA fissata ($-pE\cos\theta$).
Questo andamento è ESPONENZIALMENTE legato alla TEMPERATURA: per campi piccoli si ricava che la polarizzabilità di una sostanza (polare) è inversamente proporzionale alla temperatura: $\alpha_{orient.} = \frac{1}{3}\frac{p_e^2}{k_B T}$ $\left[e^{-\frac{E}{k_B T}} \Rightarrow P(\cos\theta) = A e^{\frac{p\cos\theta}{k_B T}} \Rightarrow \frac{1}{2}\left(1+\frac{p_e E}{k_B T}\cos\theta\right)\right]$

3.41) Spiegare il meccanismo di polarizzazione per deformazione, indicando l'eventuale dipendenza del dipolo elettrico indotto dalla temperatura.
La polarizzazione per deformazione avviene in presenza di sostanze NON polari. Questo subisce l'effetto del campo elettrico esterno con conseguente spostamento del centro delle cariche positive e negative (da quello "neutro") e la formazione di un campo $\vec{E}$ di richiamo e conseguente dipolo indotto.

$$\rho = \frac{-e}{\frac{4}{3}\pi a^3} = \frac{-3e}{4\pi a^3} \rightarrow \text{Legge di Gauss: } \int_{\substack{SFERA\\ R=\delta}} \vec{E}\cdot\hat{R}\,dA = 4\pi\delta^2 E_R = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho V}{\varepsilon_0} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\cdot\frac{4}{3}\pi\delta^3$$

$$\Rightarrow \boxed{E_R = \frac{\rho\delta}{3\varepsilon_0} = \frac{-\delta e}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\hat{\delta} = \frac{-e\cdot\vec{\delta}}{4\pi\varepsilon_0 a^3}}$$

All'equilibrio deve valere $\Sigma\vec{F}=0 \Rightarrow q(\vec{E}_{nucleo}+\vec{E}) = 0 = \frac{-q^2\vec{\delta}}{4\pi\varepsilon_0 a^3} + q\vec{E} \Rightarrow \vec{\delta} = \frac{\vec{E}}{q}4\pi\varepsilon_0 a^3$

da cui: $\vec{p}_{ind} = \underbrace{4\pi\varepsilon_0 a^3}_{\alpha}\cdot\vec{E}$ $\Rightarrow$ α_{dip} non dipende da T!

3.42) Calcolare il rapporto (valore numerico con le corrette unità di misura) fra dipolo elettrico indotto e campo elettrico nel modello di Thomson dell'atomo di Idrogeno ($a = 0{,}53\cdot10^{-10}$ m).

$$\frac{\vec{p}_{ind}}{\vec{E}} = 4\pi\varepsilon_0 a^3 = 4\pi\cdot 8{,}85\cdot10^{-12}\cdot(0{,}53\cdot10^{-10})^3\ \frac{C^2}{N\cdot m^2}\cdot m^3 = 1{,}66\cdot10^{-41}\ \frac{C^2 m}{N}$$

3.43) Definire la carica LIBERA e la carica di polarizzazione.
Le cariche LIBERE possono esistere ISOLATE (ciò non implica che possano muoversi liberamente nel materiale) → ad es. le cariche impiantate nel silicio.
Le cariche di POLARIZZAZIONE sono vincolate al dielettrico (non possono muoversi liberamente).

3.44) Definire il vettore polarizzazione.
$\vec{P} = \frac{\sum\vec{p}_{i(indotto)}}{V}$ = momento di dipolo indotto per unità di volume $\vec{P} = \overset{\text{concentraz. dipoli}}{N}\vec{p}_{ind} = N\alpha\vec{E}$ $(\vec{E}=\vec{E}_{esp}+\vec{E}_{pol})$
con $\alpha_{DIP} = 4\pi\varepsilon_0 a^3$ e $\alpha = \frac{1}{3}\frac{p_e^2}{k_B T}$

3.45) Definire la suscettività elettrica, la costante dielettrica relativa, la costante dielettrica assoluta.
La suscettività elettrica misura quanto un dielettrico si polarizza in risposta ad un campo elettrico. Per campi statici: $\vec{P} = \chi\varepsilon_0\vec{E} \Rightarrow [\chi] = \frac{|\vec{P}|}{\varepsilon_0|\vec{E}|} = \frac{N\alpha|\vec{E}|}{\varepsilon_0|\vec{E}|} = \left[\frac{N\alpha}{\varepsilon_0}\right] = m^{-3}\cdot\frac{C^2}{N\cdot m^2}\cdot\frac{1}{C^2/N\cdot m^2}$
La costante dielettrica quantifica la propensione di una sostanza a contrastare l'intensità del campo elettrico, è detta assoluta se il mezzo è lo spazio vuoto, relativa il coeff. di proporz. con ε_0.
$\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$
$\varepsilon_r = 1+\chi$ (relativa del mezzo, adimensionale).

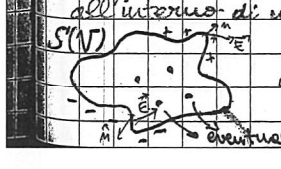
3.46) Dire le unità di misura di: 1) POLARIZZAZIONE 2) SUSCETTIVITÀ ELETTRICA 3) COSTANTE DIELETTRICA RELATIVA 4) COSTANTE DIELETTRICA ASSOLUTA 5) COSTANTE DIELETTRICA DEL VUOTO
1) $\frac{C}{m^2}$ 2) / 3) / 4) $\frac{C^2}{N\cdot m^2}$ 5) $\frac{C^2}{N\cdot m^2}$

3.47) Enunciare e dimostrare la relazione fra carica di polarizzazione superficiale e vettore di polarizzazione sulla superficie di un dielettrico. $\sigma_{POL} = \vec{P}_{SUP}\cdot\hat{n}$ $\left[\frac{C}{m^2}\right]$



Globalmente il sistema è neutro ma sulla superficie compare una carica σ, infatti:
$dq_{POL} = q\,n\,\frac{|\vec{\delta}|\cos\theta\,dA}{V} \Rightarrow \sigma_{POL} = \frac{dq_{POL}}{dA} = q\,n\,|\vec{\delta}|\cos\theta = |\vec{p}_{ind}|\,n\cos\theta = |\vec{P}|\cos\theta = \boxed{\vec{P}\cdot\hat{n}}$

3.48) Enunciare e dimostrare la relazione fra carica di polarizzazione nel volume e vettore di polarizzazione all'interno di un dielettrico.



Sia che $\hat{n}$ ed $\vec{E}$ siano costanti o meno si deve avere che $\Sigma Q_{POL} = 0$ (sistema a carica totale nulla).
$0 = Q_{POL(interna)} + Q_{POL(sup)} = \int_{V(S)}\rho_{POL}\,dV + \int_{S(V)}\sigma_{POL}\cdot dS = \int_V \rho_{POL}\,dV + \int_S \vec{P}\cdot\hat{n}\,dS = \int_V \rho_{POL}\,dV + \int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{P}\,dV \Rightarrow \boxed{\rho_{POL} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P}}$