Lezione 1: distanza e prodotto scalare nello spazio euclideo; Diseg. di Cauchy-Schwarz; cenni di topologia dello spazio euclideo. pag. 3

Lezione 2: Limiti per funzioni in più variabili. pag. 8

Lezione 3: Derivate parziali e derivate direzionali. Teorema di Lagrange in più variabili. Esempi ed esercizi. pag. 11

Lezione 4: Funzioni differenziabili. Teorema del differenziale totale (con Dim). Esempi ed esercizi. pag. 15

Lezione 5: Teorema della derivazione funzione composta in più variabili. Esempio di funzione differenziabile ma non C^1. Applicazioni ed esercizi. pag. 19

Lezione 6: Proprietà del gradiente: direzione di massima pendenza, ortogonalità rispetto alle curve di livello, funzioni con gradiente nullo su aperti connessi. pag. 27

Lezione 7: Derivate di ordine superiore, Teorema di Schwarz (senza dim). Hessiano e forme quadratiche semidefinite positive/negative. Esempi. Condizione necessaria per avere massimi e minimi locali utilizzando la matrice Hessiana. pag. 33

Lezione 8: Formula di Taylor, condizione sufficiente per avere massimi e minimi locali utilizzando la matrice Hessiana. Forme quadratiche definite positive. Esempi. pag. 39

Lezione 9: Esercitazione su massimi e minimi per funzioni in più variabili. pag. 44

Lezione 10: Esercitazione sul calcolo differenziale in più variabili.

Lezione 11: Calcolo integrale in più variabili: funzioni semplici, definizione di funzione integrabile secondo Riemann, insiemi misurabili secondo Peano-Jordan. Integrabilità delle funzioni continue. pag. 50

Lezione 12: Formule di riduzione di Fubini. Domini normali. pag. 52

Lezione 13: Formule di riduzione per integrali tripli: metodo delle colonne e delle sezioni. Volume dei solidi di rotazione. pag. 55

Lezione 14: Integrazione con il cambio di variabili. Matrice Jacobiana, coordinate polari e applicazioni. pag. 61

Lezione 15: Cambio di variabili cilindriche e sferiche. Esempi e applicazioni. pag. 67

Lezione 16: Esercitazione di ricapitolazione sul calcolo integrale. pag. 71

master COPY

Lezione 17: Integrali impropri. Definizioni ed esempi. Curve regolari, curve definite in coordinate polari. Esempi e applicazioni. pag. 74

Lezione 18: Curve equivalenti, retta tangente ad una curva. Versore tangente e lunghezza di una curva. Dimostrazione che la curva di lunghezza minima che unisce due punti è la retta. Esempi ed esercizi. pag. 80

Lezione 19: Lunghezza di una curva: esempi e applicazioni. Campi vettoriali nello spazio euclideo. Prodotto vettoriale. Definizione di divergenza e rotore. Definizione di Superficie regolare. pag. 84

Lezione 20: Area delle superfici. Superfici di rotazioni e superfici di rotazione espresse in modo parametrico. Esempi ed esercizi. pag. 90

Lezione 21: Lavoro di campi vettoriali, campi irrotazionali e campi conservativi. pag. 94

Lezione 22: Teorema di Gauss green. Condizione sufficiente per un campo di essere conservativo. Esempi e applicazioni. Domini semplicemenți connessi. pag. 101

Lezione 23: Teorema della divergenza in 2 e 3 variabili. Esercizi di ricapitolazione. pag. 105

Lezione 24: Simulazione esame. pag. 111

Scheda *esercizi limiti* pag. 115

Scheda *esercizi differenziabilità* pag. 118

Scheda *esercizi* pag. 122

Scheda *esercizi max-min* pag. 127

Scheda *esercizi "Fubini"* pag. 134

Scheda *Integrali 2* pag. 136

Scheda *Integrali 3* pag. 139

Scheda *curve* pag. 141

Scheda *superfici* pag. 144

Scheda *lavoro* pag. 147

Appello aprile 2021 pag. 150

master COPY

master COPY

Per dispense, informazioni, ecc. scrivete pure una mail a:
tommaso.pagni@gmail.com
(tanto non ho niente di meglio da fare)

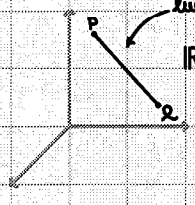
Lezione 1

$\mathbb{R}^d$ spazio euclideo

presi due punti $P=(P_1,\dots,P_d)$ $Q=(Q_1,\dots,Q_d)$

la distanza fra P e Q $=\sqrt{(P_1-Q_1)^2+\dots+(P_d-Q_d)^2}$

lunghezza vettore che congiunge due punti



master copy

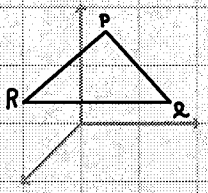
Spazio metrico
se esiste una f. distanza $d:\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$

1) $d(P,Q)\geq 0$ $\quad d(P,Q)=0 \leftrightarrow P=Q$

2) $d(P,Q)=d(Q,P)$

3) $d(P,Q)\leq d(P,R)+d(R,Q)\quad \forall P,Q,R\in\mathbb{R}^d$

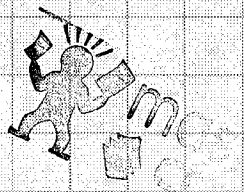
disuguaglianza triangolare ⟶



completezza
se ogni successione $\{P_N\}$ di Cauchy converge

$\forall \varepsilon>0\ \exists \bar N$ t.c. $\forall n>\bar n$

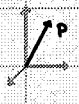
$d(P_N,P_n)<\varepsilon\quad \exists\ \bar P$ t.c. $d(P_N,\bar P)\overset{N\to\infty}{\longrightarrow}0$



master copy

prodotto scalare

vettore $P=(P_1,\dots,P_d)$



$$\langle P,Q\rangle=\sum_{i=1}^{d} P_i\cdot Q_i$$

$$\|P\|=\sqrt{\langle P,P\rangle}=\sqrt{\sum_{i=1}^{d} P_i^2}$$

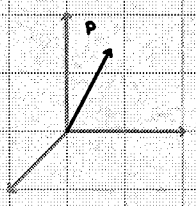
master copy

$P=(0,2,1)\quad Q=(3,-1,2)\quad\in\mathbb{R}^3$

$\langle P,Q\rangle=\sum_{i=1}^{d} P_i\cdot Q_i=0\cdot 3+2\cdot(-1)+1\cdot 2=12$

norma vettore P, $\|P\|=\sqrt{\langle P,P\rangle}=\sqrt{\sum_{i=1}^{d} P_i^2}=\sqrt{0^2+2^2+3^2}=\sqrt{53}$

$\|Q\|=\sqrt{\langle Q,Q\rangle}=\sqrt{\sum_{i=1}^{d} i^2}=\sqrt{3^2-1^2+2^2}=\sqrt{14}$



disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

$$|\langle P,Q\rangle| \leq \|P\| \cdot \|Q\|$$

$$\left|\sum_{i=1}^{d} P_i \cdot Q_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{d} P_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{d} Q_i^2}$$

$|12| \leq \sqrt{53} \cdot \sqrt{14}$ sì

$P(-1,-1,5) \qquad Q(-2,-\frac{1}{2},4)$

$\langle P,Q\rangle = \sum_{i=1}^{d} P_i \cdot Q_i = 2 + \frac{1}{2} + 20 = \frac{45}{2}$

$\|P\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} P_i^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 5^2} = \sqrt{27} \qquad \|Q\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} Q_i^2} = \sqrt{(-2)^2 + 1/2^2 + 4^2} = \frac{9}{2} \quad \rightarrow \left|\frac{45}{2}\right| \leq \sqrt{27} \cdot \frac{9}{2}$

proprietà prodotto scalare

1) $\langle v,v\rangle \geq 0 \quad \langle v,v\rangle = 0 \leftrightarrow v = 0$ PRODOTTO PER UN ELEMENTO NULLO

2) $\langle v,w\rangle = \langle w,v\rangle$ È COMMUTATIVO

3) $\langle \lambda v,w\rangle = \lambda\langle v,w\rangle \quad \lambda \in \mathbb{R}$ PORTO FUORI LO SCALARE CHE MOLTIPLICA UN VETTORE

4) $\langle v+w,\mu\rangle = \langle v,\mu\rangle + \langle w,\mu\rangle$

dim

$|\langle v,w\rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\| \qquad \left|\sum_{i=1}^{d} v_i \cdot w_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{d} v_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{d} w_i^2}$

$\langle v+\lambda w, v+\lambda w\rangle$

$\langle v, v+\lambda w\rangle + \langle \lambda w, v+\lambda w\rangle = \langle v,v\rangle + \langle v,\lambda w\rangle + \langle \lambda w, v\rangle + \langle \lambda w, \lambda w\rangle$

$\underbrace{\langle v,v\rangle}_{c} + 2\lambda \underbrace{\langle v,w\rangle}_{b} + \lambda^2 \underbrace{\langle w,w\rangle}_{a}$

$0 \leq \langle v+\lambda w, v+\lambda w\rangle = a\lambda^2 + 2\lambda b + c \geq 0 \quad \forall \lambda \longrightarrow \Delta \leq 0$

①

$4b^2 - 4ac \leq 0 \longrightarrow b^2 - ac \leq 0 \qquad (x^2 \leq 7 \quad |x| \leq \sqrt{7})$

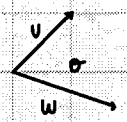
$\langle v,w\rangle^2 \leq \langle v,v\rangle \cdot \langle w,w\rangle$

$|\langle v,w\rangle| \leq \sqrt{\langle v,v\rangle} \cdot \sqrt{\langle w,w\rangle}$

proprietà geometrica del prodotto scalare

$\langle v,w \rangle = \|v\| \cdot \|w\| \cdot \cos\theta$

dim



$\langle v,w \rangle = \|v\| \cdot \|w\| \cdot \cos\theta$

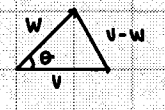
$\theta = 0 \rightarrow \cos\theta = 1$ v e w paralleli



$\langle v,w \rangle = \|v\| \cdot \|w\| \cdot \cos\theta$

$\theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow \langle v,w \rangle = 0$ v e w ortogonali tra di loro





$\|v-w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\|v\| \cdot \|w\| \cos\theta$

$\langle v-w, v-w \rangle = \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\langle v,w \rangle$ teorema dei coseni

~~$\|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\langle v,w \rangle = \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\|v\| \cdot \|w\| \cos\theta$~~

$\langle v,w \rangle = \|v\| \cdot \|w\| \cos\theta$

esercizio

$A=(1,2,-3)$ $B=(0,2,4)$ $C=(5,-1,3)$ cosθ tra A e B $(A \cdot B)C =$

· cosθ: $\langle A,B \rangle = \|A\| \cdot \|B\| \cdot \cos\theta$

$\sum_{i=1}^{d} A_i \cdot B_i = 4 - 12 = -8$ $\|A\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} A_i^2} = \sqrt{14}$ $\|B\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} B_i^2} = \sqrt{20}$

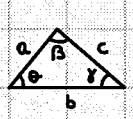
$\cos\theta = \frac{\langle A,B \rangle}{\|A\| \cdot \|B\|} = \frac{-8}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{20}}$

· $(A \cdot B)C$:

$(\langle A,B \rangle) \cdot C = -8(5,-1,3) = -40, -8, -24$

Teorema del coseno

se abbiamo un triangolo



$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$ (angolo opposto)

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\gamma$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$

