analisi matematica II







E-mail: jacopo.bellazzini@unipi.it

Argomenti:

Gli argomenti vengono trattati seguendo questo ordine:

1. Calcolo ***differenziale*** in $\mathbb{R}^n$
2. Calcolo ***integrale*** in $\mathbb{R}^n$
3. ***Superfici*** e ***Curve*** in $\mathbb{R}^n$
4. ***Funzione Implicita***
5. Teorema del ***Rotore*** e ***Divergenza***

master COPY
master COPY
master COPY

Spazio euclideo $\mathbb{R}^n$



due punti, vettori ovvero segmenti dall'origine

$P, Q \in \mathbb{R}^n$

$d(P,Q) = \sqrt{(p_1-q_1)^2+(p_2-q_2)^2+\dots+(p_n-q_n)^2}$

$P=(p_1,\dots,p_n)$ sono le coordinate del vettore P

$Q=(q_1,\dots,q_n)$

proprietà della distanza euclidea in $\mathbb{R}^n$

- $d(P,Q)\geq 0 \quad \forall P,Q$ al massimo è 0 (non esiste una distanza negativa perché è la radice quadrata di somma di quadrati)
- $d(P,Q)=0 \iff P=Q$ sono punti coincidenti e la somma viene $0^2+0^2\dots$ $p_1=q_1$ $p_2=q_2$
- $d(P,Q)=d(Q,P)$ si possono invertire al contrario perché poi si eleva al quadrato
- $d(P,Q)\leq d(P,R)+d(R,Q) \quad \forall P,Q,R$ → disuguaglianza triangolare

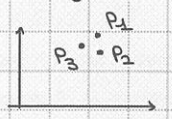
$\mathbb{R}^n$ è uno spazio metrico completo $\{P_N\}$ → quando tutte le successioni di Cauchy convergono

$\forall \varepsilon>0 \ \exists N>0$ t.c. $\forall n,m>N \quad d(P_N,P_m)<\varepsilon$

$\Rightarrow \exists \bar{P} \ d(P_n,\bar{P}) \xrightarrow{N\to\infty} 0$

definizione successione di Cauchy:
una successione di punti dello spazio euclideo è di Cauchy se fissato ε $\exists n$ per cui qualunque coppia oltre N, la distanza tra i 2 punti è sugli piccola (la quantità fissata all'inizio)

spiegato con un disegno



definizione di cauchy

$\forall \varepsilon>0 \quad \exists N>0$

$d(P_n,P_m)<\varepsilon \quad \forall n,m>N$

dice che un certo valore N tutti i P_n sono distanti tra loro meno di ε quindi sono vicini

completo: quando la successione verifica questa proprietà allora la successione P_n converge ad un certo punto $\bar{P}$ ovvero:

$\forall \varepsilon' \ \exists N'>0 \quad \forall n>N' \quad d(P_N,\bar{P})<\varepsilon'$ converge: la distanza fra il punto P_n e il punto limite → 0 per $N\to\infty$

esempio

$\varepsilon = 10^{-60}$ distanza

$N = 10^{20}$ numero indice $n,m>N$

la distanza tra loro due è + piccola di ε qualunque n,m sono vicinissimi

$\varepsilon = 10^{-120}$ ancora più vicini

N = ancora più grande

c'è un punto a cui stanno convergendo e quindi esiste un punto in cui la successione converge.. solo quando tutte le successioni convergono

Tutte le volte che le successioni di Cauchy convergono allora diremo che lo spazio è completo ($\mathbb{R}^n$) e la distanza euclidea in $\mathbb{R}^n$ è uno spazio metrico completo

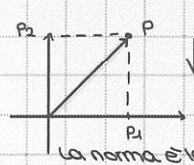
Prodotto scalare

P,Q vettori $\quad \langle P,Q\rangle = \sum_{i=1}^{n} p_i q_i$ sommatoria del prodotto delle componenti

prodotto scalare e $\langle P,P\rangle = \sum_{i=1}^{n} p_i p_i = \sum_{i=1}^{n} p_i^2$

norma $\quad \|P\| = \sqrt{\langle P,P\rangle}$ rad. quadrata del prodotto scalare di P con se

$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} p_i^2} = \sqrt{p_1^2+p_2^2+\dots+p_N^2}$ graficamente:



$\sqrt{p_2^2+p_1^2}$ = P lunghezza vettore

questo è il caso bidimensionale

la norma è la lunghezza di un vettore ancorato al punto P d(P-origine)

proprietà: disuguaglianza di cauchy - Schwarz (Shwarz)

se prendo 2 vettori P,Q e faccio il prodotto scalare (anche negativo)

$|\langle P,Q\rangle| \leq \|P\|\,\|Q\|$

- $\langle P,Q\rangle$ → prodotto scalare
- $\|P\|$ → valore assoluto
- norma $(\langle P,P\rangle)^2(\langle Q,Q\rangle)$



$P=(-1,0)$ prodotto scalare: somma dei prodotti delle componenti

$Q(-1;0)$

$x=-1\cdot-1=-1$

$y=0\cdot0$

norma di $P=1$ val. ass.

norma di $Q=0$

la norma è il prodotto scalare tra P, P e la norma di Q è il prodotto scalare tra Q e Q allo indice quadrato

Dimostrazione

P, Q vettori arbitrari in $\mathbb{R}^n$

$\langle P+\lambda Q, P+\lambda Q\rangle$ prodotto scalare $\lambda \in \mathbb{R}$ $\quad \|P\|^2 = \langle P,P\rangle$

ha un segno ben definito → il prodotto scalare è la norma al quadrato quindi ≥ 0

$\|P+\lambda Q\|^2 = \langle P+\lambda Q, P+\lambda Q\rangle \geq 0$ può essere svolto termine a termine (prodotto scalare)

$\langle A, \lambda B\rangle = \lambda \langle A, B\rangle$

$\langle A, B+C\rangle = \langle A, B\rangle + \langle A, C\rangle$

per le proprietà dei prodotti scalari

p. scalare proprietà di simmetria, membro a membro

$= \langle P,P\rangle + 2\lambda \langle P,Q\rangle + \lambda^2 \langle Q,Q\rangle$

faccio il p.s

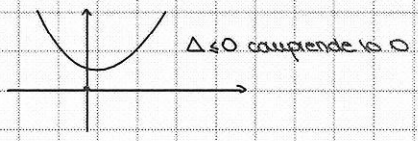
$\langle P,P\rangle$ positivo $+ 2\lambda \langle P,Q\rangle$ non è detto $+ \lambda^2 \langle Q,Q\rangle$ positivo bisogna fare la maggiorazione

noi sappiamo che è maggiore ≥ 0 $\forall \lambda$ perché la norma è al quadrato

è un polinomio di II grado in λ, funzione di Cauchy

se è così $\Delta \leq 0$ così $\forall \lambda \geq 0$ è sempre positivo

perché $\Delta \leq 0$? $P(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$



$\Delta = b^2 - 4(a)(c)$

$\Delta = 4(\langle P,Q\rangle)^2 - 4\langle P,P\rangle\langle Q,Q\rangle$ deve essere ≤ 0

semplifico il 4

$\langle P,Q\rangle^2 - \langle P,P\rangle\langle Q,Q\rangle \leq 0$

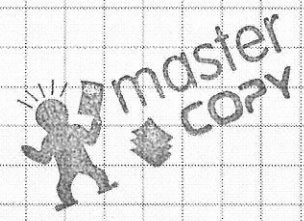
$\langle P,Q\rangle^2 \leq \langle P,P\rangle\langle Q,Q\rangle$

$|\langle P,Q\rangle| \leq \langle P,P\rangle^{\frac{1}{2}} \langle Q,Q\rangle^{\frac{1}{2}}$ (uso la radice quadrata)

$\|P\| \quad \|Q\|$

□

master COPY



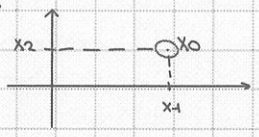
master COPY



Cosa è la palla di raggio = R centrata in $x_0 \in \mathbb{R}^n$ $x_0 = (x_1, \dots, x_n)$ vettore in n dimensioni

$B_R(x_0) = \{ y \in \mathbb{R}^n \text{ t.c } d(x_0, y) \le R \}$

- B_R: palla, bolla
- x_0: raggio ampliato
- y: punti (parte di piano)
- $d(x_0, y)$: distanza euclidea
- R: raggio



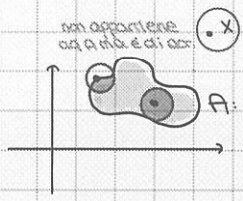
$(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 \le R^2$

punti dello spazio euclideo la cui distanza da x_0 è minore uguale a R

definizione: $x \in \mathbb{R}^n$ è di accumulazione rispetto ad un insieme A se (intorno: cioè qualsiasi dell'insieme A quindi non nel complesso ma stesso $\forall R$ quindi deve valere sempre)

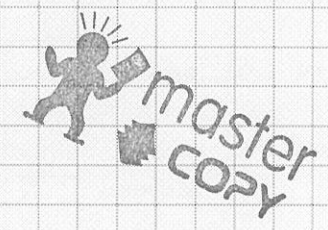
$\forall R > 0 \quad B_R(x) \setminus \{x\} \cap A \neq \emptyset$ (intersecato, vuoto)

potrebbe appartenere ad A nel perimetro, infatti corso una parte è di accumulazione e una no



palla di raggio R a cui tolgo x, ma intersecata A quindi non è accumulazione

A: regione del piano, curva liscia e A è l'insieme dentro, escluso il contorno, perimetro e prendo un x

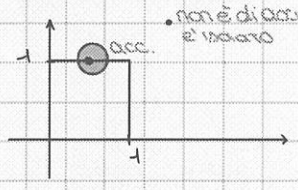


definizione: $x \in A$ non di accumulazione si dice isolato $\longrightarrow B_R(x) \setminus \{x\} \cap A = \emptyset$

$A = [0,1] \times [0,1] \cup \{(2,2)\}$

quadrato, punto

- non è di accumulazione è isolato



(non è di accumulazione perché per R piccoli non sono nel quadrato)

x può essere:
* accumulazione
* isolato

A può essere:
* chiuso
* aperto

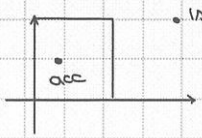


definizione:

A, insieme è chiuso se è contenuto o uguale

$Acc(A) = \{ \text{punti di accumulazione di } A \} \subseteq A$ (è contenuto)

- $Acc(A)$: quadrato
- quadrato + isolato (non di accumulaz)



$[0,1] \times [0,1] \cup \{(2,2)\} = A$