Indice

Lezione 1 1
1.1 Spazio euclideo 1
1.2 Prodotto scalare 2
1.2.1 Proprietà del prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 2
1.2.2 Proprietà geometrica del prodotto scalare 3
1.3 Cenni di topologia 4

Lezione 2 5
2.1 Funzione continua 5

Lezione 3 8
3.1 Derivate parziali 8
3.2 Derivata direzionale 9

Lezione 4 12
4.1 Funzione differenziabile 12
4.2 Teorema di differenziazione totale 13

Lezione 5 16
5.1 Teorema della funzione composta (chain-rule) 16
5.2 Esercizi 20
Esercizio 1 20
5.2.1 Esercizi sulla differenziabilità 22

Lezione 6 25
6.1 Proprietà del gradiente 25
6.2 Curve di livello 26
6.3 Aperto connesso 28

Lezione 7 32
7.1 Piano tangente 32
7.2 Derivate di ordine superiore 33
7.3 Teorema di Schwartz 34
7.4 Punti critici 37

Lezione 8 39
8.1 Ripasso lezione precedente 39
8.2 Formula di Taylor 39
8.3 Massimo e minimo locale 41
8.3.1 Teorema di Weiestrass 44
Esercizio 45

Lezione 9 47
9.1 Ripasso lezione precedente 47
9.2 Esercizi 49
Esercizio 1 49
Esercizio 2 50
Esercizio 3 51
Esercizio 4 52
9.2.1 Esempio di funzione in $\mathbb{R}^3$ 54

Lezione 10 56
10.1 Esercizi 56
10.1.1 Esercizio 1 56
10.1.2 Esercizio 2 59
10.1.3 Esercizio 3 60

Lezione 11 63
Integrazione secondo Riemann 65
Misurabilità secondo Peano-Jordan 66
Uniforme continuità 68

Lezione 12 70
Riassunto 70
Formule di riduzione di Fubini 70
Teorema di Fubini 71
Insieme normale 73

Lezione 13 75
Riassunto 75
Fubini per il parallelepipedo 76
Integrazione per colonne 76
Integrazione per sezioni 77

Lezione 14 79
Riepilogo 79
Calcolo del volume 79
Cambio di variabili 79
Teorema del cambio di variabili in dimensione superiore 80
Cambio in coordinate polari 80

Lezione 15 83
Cambio di variabili 83
Coordinate cilindriche 83
Coordinate sferiche 84
Volume della sfera in $\mathbb{R}^3$ 84

Lezione 16 87
Volume della sfera in $\mathbb{R}^4$ 87

Lezione 17 91
Integrali impropri 91
Curva in $\mathbb{R}^n$ 93
Retta tangente alla curva nel punto $\gamma(t_0)$ 95
Curve in $\mathbb{R}^2$ descritte in coordinate polari 96

Lezione 18 98
Verso di una curva 98
Lunghezza di una curva 99
Lunghezza di grafici di funzioni 100

Lezione 19 102
Lunghezza di una curva regolare 102
Curva descritta in coordinate polari 102
Campi vettoriali 103
Prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^3$ 103
Superfici 105

Lezione 20 107
Superficie di una sfera 107
Superfici grafici di funzioni 108
Area delle superfici di rotazione 109

Lezione 21 111
Integrali di superficie 111
Integrale curvilineo 111

master COPY COPISTERIA

Campi conservativi ($\mathbb{R}^n$) 113
F conservativo in A 114

Lezione 22 117
Teorema di Gauss-Green 117
Applicazioni: calcolo dell'area con Gauss-Green 118
Stabilire se un campo è conservativo 120

Lezione 23 124
Calcolo del lavoro 124
Teorema di Gauss-Green 124
Teorema della divergenza 125
Teorema della divergenza in $\mathbb{R}^3$ 126
Esercizio 1: calcolo del flusso 127
Esercizio 2: calcolo del lavoro 128
Esercizio 3: calcolo del lavoro 130

Lezione 24 131
Esercizio: integrale di superficie 131
Esercizio: calcolo del lavoro 132

Scheda limiti 134

Scheda differenziabilità 136

Scheda derivate della funzione composta, matrice hessiana, sviluppo di Taylor 141

Scheda sviluppo di Taylor, punti critici e differenziabilità 147

Esercizi integrazione 1: Fubini 152

Esercizi integrazione 2 155

Esercizi integrazione 3 157

Scheda curve 160

Scheda campi vettoriali 162

Esercizi riepilogativi 165

Esercizi integrali e integrali superficiali extra 168

Esercizi lavoro extra 171

Esercizi da esami online 172

Prove di esame svolte
Appello di aprile 2022 180
Appello Giugno I 2022 183
Appello Giugno II 2022 188
Appello Luglio 2022 193
Appello Settembre 2022 198
Appello Gennaio I 2023 202
Appello Gennaio II 2023 207
Appello Febbraio 2023 212

Domande prove orali 217

master COPY COPISTERIA

Lezione 1

02/03/2022

1.1 Spazio euclideo

Presi due punti $P = (P_1, \ldots, P_d)$ e $Q = (Q_1, \ldots, Q_d)$, la distanza tra i due vale:

$$d(P,Q) = \sqrt{(P_1 - Q_1)^2 + (P_2 - Q_2)^2 + \cdots + (P_d - Q_d)^2}$$

La *distanza euclidea* è la lunghezza del segmento che congiunge i due punti.

Def: (Spazio metrico) Se esite una funzione distanza $d : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$

1. Se $d(P,Q) \geq 0 \quad d(P,Q) = 0 \iff P = Q$
2. La distanza tra due punti è indipendente dall'ordine $d(P,Q) = d(Q,P)$
3. $d(P,Q) \leq d(P,R) + d(R,Q) \quad \forall P, Q, R \in \mathbb{R}^d$ (disuguaglianza triangolare);

Def: Spazio di completezza (Proprietà dello spazio euclideo)

Se per ogni successione di Cauchy $\forall \epsilon > 0 \ \exists \overline{N}$ *t.c.* $\forall M > \overline{N}$:

$$d(P_N, P_M) < \epsilon \ \Rightarrow \ \exists \overline{P} \text{ } t.c. \text{ } d(P_n, \overline{P}) \longrightarrow 0$$

1.2 Prodotto scalare



Prodotto scalare tra due vettori $< P, Q >$ si definisce come:

$$< P, Q >= \sum_{i=1}^{d} P_i Q_i$$

Esempio: Consideriamo nello spazio $\mathbb{R}^3$ i punti $P(0,2,7)$ e $Q(3,-1,2)$, allora:

$$< P, Q >= 0 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + 7 \cdot 2 = 0 - 2 + 14 = 12$$

Def: Norma del vettore

$$||P|| = \sqrt{< P, P >} = \sqrt{P_1 \cdot P_1 + P_2 \cdot P_2 + \cdot + P_d \cdot P_d} = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + \ldots P_d^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} P_i^2}$$

Esempio:

Se P=(0,2,7) $\Rightarrow \ ||P|| = \sqrt{0^2 + 2^2 + 7^2} = \sqrt{4 + 49} = \sqrt{53}$;

Se Q=(3,-1,2) $\Rightarrow \ ||Q|| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 1 + 4} = \sqrt{14}$

Domanda: è vero che $| < P, Q > | \leq ||P||\ ||Q||$, o analogamente che:

$$\Big| \sum_{i=1}^{d} P_i Q_i \Big| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{d} P_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{d} Q_i^2}$$

Vediamo se è vero nell'esempio di prima: $12 \leq \sqrt{53} \cdot \sqrt{14}$ quindi l'affermazione è vera.

Proviamo con un altro esempio: dati P(-1,-1,5) e $Q = (-2, -\frac{1}{2}, 4)$ verificare se vale:

$$| < P, Q > | \leq ||P||\ ||Q||$$

Calcolo $< P, Q >$:

$$< P, Q >= (-1) \cdot (-2) + (-1) \cdot \Big(-\frac{1}{2} \Big) + 5 \cdot 4 = 2 + \frac{1}{2} + 20 = \frac{45}{2}$$

Poi calcolo la norma di P e la norma di Q:

$$||P|| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 5^2} = \sqrt{27}$$

$$||Q|| = \sqrt{(-2)^2 + \Big(\frac{1}{2}\Big)^2 + 4^2} = \sqrt{4 + \frac{1}{4} + 16} = \sqrt{\frac{81}{4}} = \frac{9}{2}$$

Dunque verifico se vale la disuguaglianza: $\frac{45}{2} \leq \sqrt{27} + \frac{9}{2}$.

Attenzione: l'esempio non è una dimostrazione, ma ci aiuta a intuire che questa cosa è vera.

1.2.1 Proprietà del prodotto scalare $< \cdot, \cdot >$



1. $< v, w >= 0 \iff v = 0$;
2. $< v, w >=< w, v >$ (prop. commutativa)
3. $\forall \lambda \in \mathbb{R} : < \lambda v, w >= \lambda < v, w >$;
4. $< v + w, u >=< v, u > + < u, w >$ (propr. distributiva)

Queste proprietà ci servono per dimostrare che la disuguaglianza di Cauchy-Schwarts è vera.

Dimostrazione della disuguaglianza di Cauchy-Schwarz
Voglio dimostrare che:

$$\Big| \sum_{i=1}^{d} P_i Q_i \Big| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{d} P_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{d} Q_i^2}$$

Lo riscrivo come: $< v + \lambda w, v + \lambda w >$ e svolgo i conti.

$$< v + \lambda w, v + \lambda w >=< v, v + \lambda w > + < \lambda w, v + \lambda w >=$$

$$=< v, v > + \lambda < w, v > + \lambda < v, w > + \lambda^2 < w, w >= \underbrace{< v, v > + 2\lambda < v, w > + \lambda^2 < w, w >}_{\text{è un polinomio di } 2^\circ \text{ grado in } \lambda}$$

Allora chiamo $< w, w >= A$, $< v, w >= B$, $< v, v >= C$ e ottengo:

$$\Rightarrow \quad C + 2\lambda B + \lambda^2 A =< v + \lambda w, v + \lambda w >$$

Poichè $< v + \lambda w, v + \lambda w >$ è ≥ 0 per le proprietà, allora $A\lambda^2 + 2\lambda B + C \geq 0$.
Calcolo il Δ:

$$\Delta = 4B^2 - 4AC$$