Argomenti del corso

1. calcolo differenziale in $\mathbb{R}^n$
2. calcolo integrale in $\mathbb{R}^n$
3. Superfici / curve in $\mathbb{R}^n$
4. Funzioni implicite.
5. Teorema di Stokes $\longrightarrow$ importante per Fisica II

SPAZIO EUCLIDEO $\mathbb{R}^n$

Dati $P, Q \in \mathbb{R}^n$ con $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ e $Q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ definisco la distanza euclidea:

$$d(P,Q) = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2 + \dots + (p_n - q_n)^2}$$

Proprietà di d

i) $d(P,Q) \geq 0 \ \forall P, Q$

ii) $d(P,Q) = 0 \iff P = Q$

iii) $d(P,Q) = d(Q,P)$

iv) $d(P,Q) \leq d(P,R) + d(R,Q) \ \forall P, Q, R$ Disuguaglianza triangolare

$\mathbb{R}^n$ spazio metrico completo se successione di Cauchy

$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \exists N > 0 \text{ t.c. } \forall n, m > N \ d(P_n, P_m) < \varepsilon} \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \bar{P} \ d(P_n, \bar{P}) \xrightarrow[N \to \infty]{} 0 \iff \forall \varepsilon' \ \exists N' > 0 \ \forall n > N' \ d(P_n, \bar{P}) < \varepsilon'$

Cioè se tutte successioni di Cauchy convergono
Allora $\mathbb{R}^n$ è uno spazio completo

Prodotto scalare

$$P, Q \quad \underbrace{\langle P, Q \rangle}_{\text{Prodotto scalare}} = \sum_{i=1}^{N} p_i q_i \qquad \underbrace{\|P\|}_{\text{NORMA}} = \sqrt{\langle P, P \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} p_i^2} =$$

$$= \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_n^2}$$

Propietà

i) $\langle A, \lambda B \rangle = \lambda \langle A, B \rangle$

ii) $\langle A, B + C \rangle = \langle A, B \rangle + \langle A, C \rangle$

Disugualianza di Cauchy-Schwarz

$$|\langle P, Q \rangle| \leq \|P\| \cdot \|Q\| = \sqrt{\langle P, P \rangle} \cdot \sqrt{\langle Q, Q \rangle}$$

Dim.

Prendo $\langle P + \lambda Q, P + \lambda Q \rangle$ con $\lambda \in \mathbb{R}$
ho che

$$\|P + \lambda Q\|^2 \underset{def}{=} \langle P + \lambda Q, P + \lambda Q \rangle \geq 0$$

Risolvo il prodotto scalare utilizzando le proprietà

$$\langle P + \lambda Q, P + \lambda Q \rangle \Rightarrow \langle P, P \rangle + \lambda \langle P, Q \rangle + \lambda \langle Q, P \rangle + \lambda^2 \langle Q, Q \rangle \geq 0$$

$$\Rightarrow \langle P, P \rangle + 2\lambda \langle P, Q \rangle + \lambda^2 \langle Q, Q \rangle \geq 0$$

Osservo che è un polinomio di deg = 2 in λ
Ma allora $\langle P + \lambda Q, P + \lambda Q \rangle \geq 0 \iff \Delta \leq 0$

$$\Delta = 4(\langle P,Q\rangle)^2 - 4\langle P,P\rangle\langle Q,Q\rangle \leq 0$$

$$\langle P,Q\rangle^2 - \langle P,P\rangle\langle Q,Q\rangle \leq 0$$

$$\langle P,Q\rangle^2 \leq \langle P,P\rangle\langle Q,Q\rangle$$

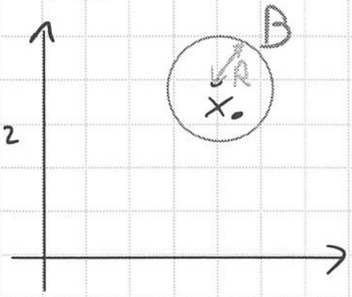
$$|\langle P,Q\rangle| \leq \sqrt{\langle P,P\rangle}\cdot\sqrt{\langle Q,Q\rangle}$$

$$|\langle P,Q\rangle| \leq \|P\|\cdot\|Q\| \qquad \square$$

Che cos'è la Palla di raggio R centrata in $x_0 \in \mathbb{R}^n$ con $x_0 = (x_1, x_2, \dots, x_n)$? UN INTORNO di x_0

$$B_R(x_0) = \{ y \in \mathbb{R}^n \text{ t.c. } d(x_0, y) \leq R \}$$

cioè in $\mathbb{R}^2$: $(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 \leq R^2$



Def.

$x \in \mathbb{R}^n$ è pto di accumulazione rispetto ad un insieme A se $\forall R > 0 \quad B_R(x) \setminus \{x\} \cap A \neq \emptyset$

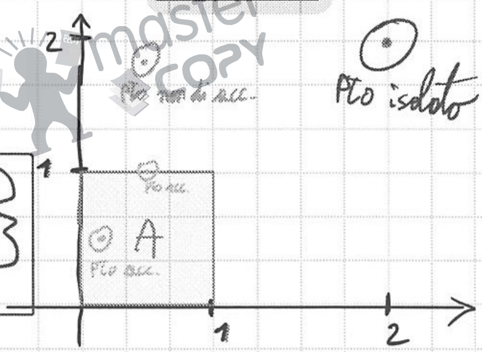
Def.

$x \in A$ pto non di accumulazione si dice ISOLATO

Es.

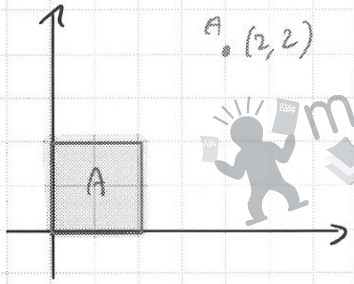
$$A = [0,1] \times [0,1] \cup \{(2,2)\}$$

$$\boxed{[a,b] \times [c,d] = \left\{(x,y) \;\; \begin{matrix} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \end{matrix}\right\}}$$

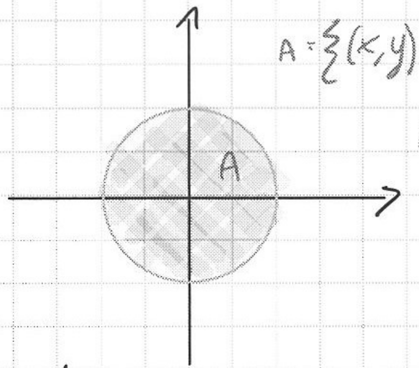


Def.

A è *chiuso* se $\{$ pti di accumulazione di $A\} = Acc(A) \subseteq A$



$Acc(A) = [0,1] \times [0,1] \subset A \Rightarrow$ A è chiuso



$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2$ t.c. $x^2+y^2<1\}$

$Acc(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2$ t.c. $x^2+y^2 \leq 1\} \not\subset A \Rightarrow$

$\Rightarrow$ A non è chiuso

A è aperto

Def.

$\overline{A}$ = chiusura di $A = A \cup Acc(A)$

Def.

A è *aperto* se $\forall x \in A \ \exists R$ t.c. $B_R(x) \subset A$

Prop.

- A è aperto $\Leftrightarrow$ A^c chiuso
- A è chiuso $\Leftrightarrow$ A^c aperto

Complementare

$\boxed{A^c = \mathbb{R}^n \setminus A}$

Def.

frontiera di A = ∂A

$\partial A = \{ x \in \mathbb{R}^n \text{ t.c. } x \in \bar{A} \cap \bar{A^c} \}$

$x_1 \in Acc(A)$

$x_2 \in Acc(A)$

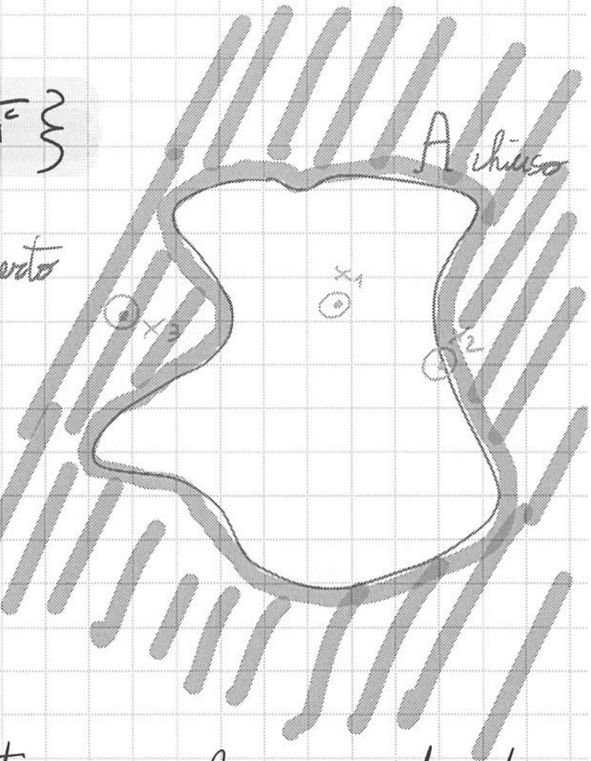
$x_3 \notin Acc(A)$

$x_1 \notin Acc(A^c)$

$x_2 \in Acc(A^c)$

$x_3 \in Acc(A^c)$

A^c aperto



$\Rightarrow x_2$ è un punto di frontiera perché è un pto di acc. sia di A che di A^c

Quindi x è pto di frontiera se:

$$\forall R>0 \quad B_R(x) \setminus \{x\} \cap A \neq \emptyset \ \wedge \ B_R(x) \setminus \{x\} \cap A^c \neq \emptyset$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall R>0 \quad \exists\, x_1 \in A,\, x_2 \in A^c \text{ t.c. } x_1, x_2 \in B_R(x) \setminus \{x\}$$

Cioè x è pto di frontiera se è pto di acc. sia per A che per A^c