MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 328 9837745

- **SUCCESSIONI:** [LEGGE che associa ad ogni elemento di $\mathbb{N}$ un numero Reale]
  - successione superiormente limitata $\rightarrow \exists M \in \mathbb{R} \mid \forall n \geq n_0,\ a_n < M$
  - successione inferiormente limitata $\rightarrow \exists M \in \mathbb{R} \mid \forall n \geq n_0,\ a_n > M$
  - successione limitata $\rightarrow$ se è superiormente e inferiormente limitata

  - successione CRESCENTE $\rightarrow \forall n, m$ con $n > m$ ho che $a_n > a_m$
  - successione DECRESCENTE $\rightarrow \forall n, m$ con $n > m$ ho che $a_n < a_m$
  - successione NON CRESCENTE $\rightarrow \forall n, m$ con $n > m$ ho che $a_n \leq a_m$
  - successione NON DECRESCENTE $\rightarrow \forall n, m$ con $n > m$ ho che $a_n \geq a_m$

- LIMITI di SUCCESSIONI: ! succ. convergente è limitata !
  - $\lim_{n \to +\infty} a_n = L$ se $\forall U$ (intorno di L), a_n appartiene definitivamente a U da un certo n_0 in poi
    - in simboli: [• LIMITE L FINITO se $\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists \bar{n} \geq n_0 \mid \forall n \geq \bar{n},\ a_n \in (L, \varepsilon)$
      • LIMITE $L = \pm\infty$ se $\forall m > 0 \rightarrow \exists \bar{n} \geq n_0 \mid \forall n \geq \bar{n},\ a_n \in (m, +\infty)$ ($a_n > m$)
      $a_n \in (m, -\infty)$ ($a_n < m$)

    proprietà dei limiti di succ.
  - unicità del limite: se $\exists L = \lim_{n \to +\infty} a_n \in L \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ L è unico
    Supponiamo che $\varepsilon = \frac{|L - L'|}{3}$ (L finito) per cui $I(L, \varepsilon) \cap I(L', \varepsilon) = \emptyset$
    Allora $a_n \notin$ ad entrambi gli intorni definitivamente
    Se L tende a $+\infty$ $I(L, \varepsilon) \cap L(M, +\infty) = \emptyset$
    basta prendere $M = L + \varepsilon$ 3
  - permanenza del segno: se $\exists L = \lim_{n \to +\infty} a_n$, $R \ni L \neq 0$ $\Rightarrow$ a_n avrà lo stesso segno di L
    Supponiamo che $L \in \mathbb{R}$ e $L > 0$, a_n, per definizione del limite, $\rightarrow$ $a_n \in I(L, \varepsilon)$ con $\varepsilon > 0$ (ad esempio $L/3$)
    $\Leftarrow$ se $x \in I(L, \varepsilon) \Rightarrow x > 0$
    quindi $a_n \in I(L, \varepsilon)$
    $\Downarrow$
    $a_n > 0$

- SOTTOSUCCESSIONI (SOTTOSUCCESSIONE) se $a_n \to L$ anche $a_{j_n} \to L$
  - Se a_n è convergente $\rightarrow$ a_{j_n} è convergente
    - dim: dato U (intorno di L), x definizione, $a_n \in U\ \forall n \geq \bar{n}$
      poiché j è crescente, $\exists n_1 > 0 \mid j(n_1) \geq \bar{n}$
      $\Downarrow$
      $\forall n \geq n_1 \Rightarrow a_{j_n} \in U$ (hanno lo stesso limite)

b sottosucc: $b = a_n \circ j$

CONFRONTO di 2 SUCCESSIONI:

- **confronto 0**: 2 successioni che sono definitivamente uguali hanno lo stesso comportamento per $n \to \infty$, questo avviene x definizione

- **confronto 1**: Sia $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$ e $a_n > b_n$ definit. $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ $a^n = (1+b) \to 1+nb$

- **confronto 2**: (CARABINIERI) Sia a_n, b_n, c_n 3 successioni

$$\lim_{n\to\infty} c_n = L \Leftarrow \begin{cases} \text{Sia } \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = L \\ \text{Sia } a_n \le c_n \le b_n \text{ [definitivamente]} \end{cases}$$

SUCCESSIONI MONOTONE → ammettono sempre limite L (ottengo proprietà dei valori estremi da cui sono delimitati)

- a_n CRESCENTE → 1. a_n SUP. LIMITATA → $L = (\sup a_n \mid n \ge n_0)$
  - 2. a_n non è SUPLIM → $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$

- a_n NON CRESCENTE → 1. a_n INF LIM → $L = (\inf a_n \mid n \ge n_0)$
  - 2 a_n non è INFLIM → $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$

x le proprietà dell'ESTREMO SUP, $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} \ge n_0 \mid a_{\bar{n}} \to L - \varepsilon$

Siccome a_n è non decrescente → $\forall n \ge \bar{n}, a_n \ge a_{\bar{n}} \Rightarrow a_n > L - \varepsilon \Rightarrow a_n \in I(L,\varepsilon)$

- CRITERIO di CAUCHY: condizione necessaria e sufficiente affinché esista $L \in \mathbb{R} \mid a_n \to L$ è che $\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{n} \ge n_0 \mid \forall n, m > \bar{n}$ si ha che $|a_n - a_m| < \varepsilon$
  i quozienti perde se c'è il limite, i termini stanno definitiv. vicini tra loro

- CRITERIO del RAPPORTO: Sia a_n (successione a termini POSITIVI)
  se $a_{n+1}/a_n \to L$ → $L > 1 \Rightarrow a_n$ è crescente $(+\infty)$
  → $L < 1 \Rightarrow a_n$ è descrente (0)
  → $L = 1 \Rightarrow$ situazione indeterminata

- CRITERIO della RADICE Sia a_n (successione a termini POSITIVI)
  se $\sqrt[n]{a_n}$ → $L > 1 \Rightarrow a_n \to +\infty$
  → $L < 1 \Rightarrow a_n \to 0$
  → $L = 1 \Rightarrow$ situazione indeterminata

MASTER COPY Tel. 050 8312126 Cell. 388 9837745

LIMITI di SUCCESSIONI

Bernoulli

$\begin{cases} \lim_{n\to+\infty} a^n = +\infty \\ a > 1 \end{cases}$ $\quad a = 1+b \to a^n = (1+b)^n \geq (1+nb)$

$\lim_{n\to\infty} a^n \geq \lim_{n\to+\infty} (1+nb) = +\infty$

$\begin{cases} \lim a^n = 0 \\ |a| < 1 \end{cases}$ $\quad \frac{1}{|a|} > 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |a|^n = \lim_{n\to+\infty} \left[\frac{1}{1/|a|}\right]^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left[1/|a|\right]^n} \to +\infty = 0$

$\left[\lim_{\substack{n\to\infty \\ a<-1}} a^n \text{ NONESISTE} \right.$ $\begin{cases} n \text{ pari } +\infty \\ n \text{ dispari } -\infty \end{cases}$ $\left.\right\}$ $\exists$ 2 sottosuccessioni che non hanno lo stesso limite

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ $\quad a^{1/n} = 1+b_n \quad a = (1+b_n)^n \geq (1+nb_n)$

$a > 1$

$0 < b_n < \frac{a-1}{n} \quad b_n = 0 \Rightarrow a^{1/n} = 1+b_n = 1$

$\begin{cases} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 0 \\ |a| < 1 \end{cases}$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

a_n è crescente $\to a_n = \sum_{h=0}^{n} \binom{n}{h} \left(\frac{1}{n^h}\right) = \sum_{h=0}^{n} \frac{1}{h!} \frac{n(n-1)\dots(n-h-1)}{n^h}$

$= \frac{1}{h!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{h-1}{n}\right)$

$a_n < a_{n+1}$

× a_{n+1} → numero dei termini aumenta
→ termini della somma non diminuiscono

a_n è limitata $\quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \sum_{h=0}^{n} \frac{1}{h!} < 1 + \sum_{s=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^s < 1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3$

$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \quad 2 < e < 3$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n^k} = \infty$

esp base ! potenza !

$\binom{n}{k+1}$ → polinomio di grado $k+1$ ⇒ $\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k+1} \cdot \frac{1}{n^k} = +\infty$

$\frac{(a-1+1)^n}{n^k} = \frac{\sum_{h=0}^{\infty} \binom{n}{h} (a-1)^h \geq \binom{n}{k+1}(a-1)^{k+1}}{n^k} \to +\infty$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$

fattoriale base espon.

$\underbrace{\frac{a}{1}\cdot\frac{a}{2}\cdots\frac{a}{[a]}}_{C(a)} \cdot \underbrace{\frac{a}{[a]+1}\cdots\frac{a}{n}}_{B(a)}$

$C(a)$ costante che dipende da a^2

$B(a)$ prodotto $n-[a]$ fattori tutti < 1

$a_n < C(a)\frac{a}{n} \to 0$

$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{n!} = 0$

fatt base pot

$n \geq k+1 \to n! \geq n(n-1)\cdots(n-k)$

$\frac{n^k}{n!} \leq \frac{n^k}{n(n-1)\cdots(n-k)}$ → grado $k+1$ → 0

$\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!} \to +\infty$

$\underbrace{\frac{n}{n}\cdot\frac{n}{(n-1)}\cdots\frac{n}{1}}_{n \text{ moltiplicato per numeri} > 1} > n$

anche $n \to +\infty$ $\frac{n^n}{n!} \Rightarrow +\infty$

$n^k < a^n < n! < n^n$

Master COPY COPISTERIA 050/8312126 388/9837745

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Serie geometrica $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ $\quad a_1 = a^1,\ a_2 = a^2,\ \dots,\ a_n = a^n$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = (1 + a + a^2 \dots + a^n)$$

ma $(1-a)(1+a \dots + a^n) = (1 - a^{n+1})$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \qquad \frac{(1-a^{n+1})}{(1-a)}$$

1. $a = 1$ → DIVERGE xK $\sum a^n = 1 + 1 + 1 \dots + 1 = +\infty$
2. $|a| < 1$ → CONVERGE xK $a^{n+1} \to 0$ $\quad \frac{1}{1-a}$
3. $a > 1$ → DIVERGE xK $\frac{-\infty}{(1-a)<0} = +\infty$
4. $a < 1$ → IRRegolare xK a seconda se $n+1$ pari $\to +\infty$ / dispari $\to -\infty$

Serie armonica $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$

raggruppando x potenze di 2 vedo che sono tutti i termini $> \frac{1}{2}$ quindi positivi

$$1 \quad \dots \quad a_4$$
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} > 2\frac{1}{4} \to > \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} > 4\frac{1}{8} > \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{15} > 8\frac{1}{16} > \frac{1}{2}$$
$$a_{16}$$

↓

Sommando infiniti termini, anche se piccoli, ma positivi arrivo a $+\infty$

Serie armonica generalizzata $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ → $\alpha = 1$ → Diverge [vedi sopra]

x Lemma di condensazione: ho de $a_2 < a_1 < a_1$ o°

$$2a_4 < a_2 + a_3 < 2a_2 \quad \text{e}$$
$$2^2 a_8 < a_4 + a_5 + a_6 + a_7 < 2^2 a_4$$

→ vale x serie a termini positivi ma decrescenti

dove $N = 2^{K+1} - 1$

$$\sum_{J=0}^{K} a_{2^{J+1}} \cdot 2^J < \sum_{J=1}^{N} a_J < \sum_{J=0}^{K} a_{2^J} \cdot 2^J$$

$$\sum_{J=0}^{K} 2^J \frac{1}{2^{(J+1)\alpha}} < \sum_{J=1}^{2^{K+1}-1} a_J < \sum_{J=0}^{K} 2^J \frac{1}{2^{J\alpha}}$$

$$\sum_{J=0}^{K} 2^J \frac{1}{2^{(J+1)\alpha}} < \sum_{J=1}^{2^{K+1}-1} \frac{1}{n^\alpha} < \sum_{J=0}^{K} 2^J \frac{1}{2^{J\alpha}} = \sum_{J=0}^{K} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^J$$

che converge se $\alpha > 1$ xK si possono fare alle serie geometriche!

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745