MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

INSIEMI FINITI

$I_n = \{0, 1, 2, \dots n-1\} \subseteq \mathbb{N}$

UN INSIEME È FINITO SE È VUOTO O ESISTONO $n \geq 1$ ELEMENTI (Def)

ATTENZIONE:

- $f: I_n \to I_m$ BIGIETTIVA SE E SOLO SE $n = m$
- SE $f: I_n \to A$ È BIGIETTIVA $|A| = n$
- SE A È FINITO ALLORA $C \subseteq A$ È FINITO E $|C| \leq |A|$
- SIANO A e B DUE INSIEMI NON VUOTI:

$f: A \to B$ INIETTIVA $\leftrightarrow |A| \leq |B|$ | $f: A \to B$ BIGIETTIVA $\leftrightarrow |A| = |B|$

Q: COME SI PUÒ CONOSCERE IL NUMERO DEGLI ELEMENTI DI UN INSIEME SAPENDO IL NUMERO DI ELEMENTI DI UN ALTRO INSIEME?

ATTRAVERSO IL CALCOLO COMBINATORIO È POSSIBILE CONOSCERE IL NUMERO DI ELEMENTI DI UN INSIEME A PARTIRE DAL NUMERO DI ELEMENTI DI UN ALTRO

PS: $|A| = n \to |\mathcal{P}(A)| = 2^n$

MOSTRIAMO PER INDUZIONE L'IMPLICAZIONE

PASSO INIZIALE: PER $n = 0$ L'IMPLICAZIONE È VERIFICATA, INFATTI

$|A| = 0 \to A = \emptyset \to |\mathcal{P}(A)| = 2^0 = 1$ → L'INSIEME DELLE PARTI DI A È INFATTI FORMATO DA UN UNICO ELEMENTO CIOÈ L'INSIEME VUOTO.

PASSO INDUTTIVO: SUPPONIAMO CHE L'IMPLICAZIONE SIA VERA PER $n \geq 0$ VOGLIAMO MOSTRARE CHE È VERA ANCHE PER $n+1$

$|A| = n+1 \to |\mathcal{P}(A \cup \{a_0\})| = 2^{n+1}$

DALL'INSIEME A ISOLIAMO UN ELEMENTO a_0 POSSIAMO ORA CREARE DEI SOTTOINSIEMI DI A, ALCUNI DEI QUALI CONTERRANNO a_0, ALTRI NO

$\mathcal{P}(A) = \{y \subseteq A \text{ t.c } a_0 \in y\} \cup \{y \subseteq A \text{ t.c } a_0 \notin y\}$ $\quad |\mathcal{P}(A)| = |P_1| + |P_2|$

P_1 $\qquad$ P_2

PER IPOTESI INDUTTIVA SAPPIAMO CHE $|\mathcal{P}(A) \setminus a_0| = 2^n$

QUESTO È PROPRIO IL NUMERO DI SOTTOINSIEMI DI A CHE NON CONTENGONO a_0, QUINDI È P_1

$|P_1| = |P_2|$ QUINDI $|\mathcal{P}(A) \cup a_0| = 2^n + 2^n = 2^{n+1}$

ES $|A| = m \quad |B| = n$

$|B^A| = n^m$

ES $|A| = n \quad |B| = m$

SIA $f: A \to B$

PER CALCOLARE IL NUMERO D APPLICAZIONI INIETTIVE DA A A B SI UTILIZZA QUESTA FORMULA

$$\left[\text{n° APPLICAZIONI INIETTIVE } f: A \to B = \frac{m!}{(m-n)!}\right]$$

PER CALCOLARE IL NUMERO D APPLICAZIONI INGENERALE

$$\left[\text{n° APPLIC } f: A \to B \; |B|^{|A|}\right]$$

ES $|A| = n \quad 0 < m \leq n$

$$\left[|P_m(A)| = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}\right]$$

IN QUESTO MODO, A PARTIRE DALL INSIEME A FORMATO DA n ELEMENTI È POSSIBILE CALCOLARE IL NUMERO DI SOTTOINSIEMI DI m ELEMENTI CHE SI POSSONO FORMARE A PARTIRE DALL INSIEME A

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

INSIEMI INFINITI:

DEF) DATI DUE INSIEMI INFINITI A E B:
$|A| \geq |B|$ SE ESISTE $f: B \to A$ INIETTIVA
$|A| = |B|$ SE ESISTE $f: B \to A$ BIGIETTIVA

ATTENZIONE: LA CARDINALITÀ NON È UN NUMERO MA UNA SORTA DI QUALITÀ CONDIVISA DAI DUE INSIEMI MESSI A CONFRONTO

ES $|A| = |\mathbb{N}| \to$ ALLORA L'INSIEME A È NUMERABILE

TEOREMA

TEOREMA: SIA A UN INSIEME INFINITO, ALLORA $|A| \geq |\mathbb{N}|$

DIM

DIM: PER DEFINIZIONE SAPPIAMO CHE SE $|A| \geq |\mathbb{N}|$ ALLORA ESISTE $f: \mathbb{N} \to A$ INIETTIVA

COSTRUIAMO QUINDI TALE FUNZIONE E DIMOSTRIAMO CHE È INIETTIVA

PRENDIAMO $a_0 \in A$ E PONIAMO $f(0) = a_0$
PRENDIAMO ORA $a_1 \in A \setminus \{a_0\}$ E PONIAMO $f(1) = a_1$
PRENDIAMO POI $a_2 \in A \setminus \{a_0, a_1\}$ E PONIAMO $f(2) = a_2$
⋮
PRENDIAMO $a_n \in A \setminus \{a_0, a_1, a_2 \dots a_{n-1}\}$ E PONIAMO $f(n) = a_n$

PER INDUZIONE VOGLIAMO DIMOSTRARE CHE: $f(n) = a_n \Rightarrow f(n+1) = a_{n+1}$

POICHÉ SAPPIAMO CHE L'INSIEME A È INFINITO ALLORA POSSIAMO CONTINUARE IL MECCANISMO SOPRA ALL INFINITO INFATTI $\forall n \in A \setminus \{f(0), f(1), f(2) \dots f(n)\}$ È ANCORA UN INSIEME INFINITO PER CUI TALE FUNZIONE È BEN DEFINITA ED È INIETTIVA

#TEOREMA

TEOREMA: L'INSIEME A È INFINITO ⇔ ESISTE $B \subseteq A$ CON $B \neq A$ E SI HA $|A| = |B|$

DIM

DIM: SAPPIAMO CHE PER GLI INSIEMI FINITI TALE INSIEME B ∄

PER MOSTRARE INVECE CHE NEL CASO DI A INFINITO TALE B ESISTE, SUPPONIAMO $A = \mathbb{N}$ E $B = 2\mathbb{N}$ CIOÈ L'INSIEME DEI NUMERI PARI

COSTRUIAMO $f: \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$ T.C. $f(x) = 2x$ LA FUNZIONE ASSOCIA AD OGNI $x \in \mathbb{N}$ IL NUMERO PARI CORRISPONDENTE A TALE x MOLTIPLICATO PER 2

$\forall x \exists 2x$ E $\forall 2x \exists x$ PERCIÒ QUESTA FUNZIONE È BIGETTIVA PER CUI PER DEFINIZIONE $|A| = |B|$

TEOREMA

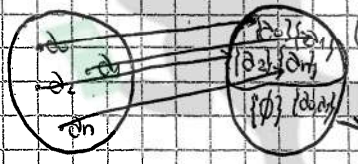
TEOREMA ∀ INSIEME A $|\mathcal{P}(A)| > |A|$

DIM

DIM: PER DIMOSTRARE CHE $|\mathcal{P}(A)| > |A|$ DOBBIAMO DIMOSTRARE CHE $|\mathcal{P}(A)| \geq |A|$ E CHE $|\mathcal{P}(A)| \neq |A|$

PER DIMOSTRARE CHE $|\mathcal{P}(A)| \geq |A|$ DOBBIAMO DIMOSTRARE CHE ESISTE $f: A \to \mathcal{P}(A)$ INIETTIVA
PER FARE QUESTO BASTA COSTRUIRE LA FUNZIONE CHE ASSOCIA AD OGNI ELEMENTO DI A IL SOTTOINSIEME DI A CHE CONTIENE SOLO QUELL'ELEMENTO

PER MOSTRARE CHE $|\mathcal{P}(A)| \neq |A|$ DOBBIAMO DIMOSTRARE CHE NON ESISTE $f: A \to \mathcal{P}(A)$ BIGETTIVA
TENENDO A MENTE LA FUNZIONE DESCRITTA SOPRA SI NOTA CHIARAMENTE CHE CI SONO ELEMENTI DI $\mathcal{P}(A)$ CHE NON SONO IMMAGINE DI ALCUN ELEMENTO DI A



ELEMENTI DI $\mathcal{P}(A)$ CHE NON SONO IMMAGINE DI NESSUN ELEMENTO DI A ATTRAVERSO f.

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

TEOREMA

TEOREMA: $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$

DIM

DIM: PER DIMOSTRARE CHE $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$ DOBBIAMO DIMOSTRARE CHE $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{R}|$ E CHE $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$

- POICHÉ $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ ALLORA ESISTE $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ INIETTIVA PER CUI PER DEFINIZIONE $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{R}|$
- PER DIMOSTRARE CHE $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$ DOBBIAMO DIMOSTRARE CHE $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ NON È BIGETTIVA

RICORDIAMO CHE $\mathbb{R}$ È IN CORRISPONDENZA BIUNIVOCA CON D L'INSIEME DEGLI ALLINEAMENTI DECIMALI RIDOTTI, CIOÈ ESISTE $h: \mathbb{R} \to D$ BIGETTIVA

PER MOSTRARE CHE ∄ $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ BIGETTIVA POSSO MOSTRARE CHE

NON ESISTE $g: \mathbb{N} \to D$ BIGIETTIVA

NEL CASO PER CUI $g: \mathbb{N} \to D$ È INIETTIVA, QUINDI PER MOSTRARE CHE NON È BIGIETTIVA DEVO MOSTRARE CHE NON È SURIETTIVA

COSTRUIAMO g

$g(0) = a_{00}, a_{01}, a_{02}\ a_{03} \ldots a_{0n}$

$g(1) = a_{10}, a_{11}\ a_{12}\ a_{13} \ldots a_{1n}$

$g(2) = a_{20}, a_{21}\ a_{22}\ a_{23} \ldots a_{2n}$

$\vdots$

$g(n) = a_{n0}, a_{n1}\ a_{n2}\ a_{n3} \ldots a_{nn}$

PER DIMOSTRARE CHE g NON È SURIETTIVA DOBBIAMO DIMOSTRARE CHE ESISTE UN $b_0, b_1 b_2 b_3 \ldots b_n$ CHE NON È IMMAGINE DI ALCUN ELEMENTO DI $\mathbb{N}$ NELLA FUNZIONE g

SCEGLIAMO $b_0 \neq a_{00}$
TUTTE LE CIFRE DOPO LA VIRGOLA SONO NUMERI COMPRESI TRA 0 E 9.

DIVIDIAMO QUESTI NUMERI IN DUE SOTTOINSIEMI DISGIUNTI
$\{0,1,2,3,4,5\}$ $\{6,7,8,9\}$

SCEGLIAMO $b_n \in \{0,1,2,3,4,5\}$ QUANDO $a_{nn} \in \{6,7,8,9\}$
SCEGLIAMO $b_n \in \{6,7,8,9\}$ QUANDO $a_{nn} \in \{0,1,2,3,4,5\}$

IN QUESTO CASO AVREMO $b_n \neq a_{nn}$ $\forall n \in \mathbb{N}$
PER CUI TALE $b_0, b_1 b_2 \ldots b_n$ ESISTE E $g: \mathbb{N} \to D$ NON È SURIETTIVA CIOÈ NON È BIGIETTIVA, PERCIÒ PER LA TRANSITIVITÀ NON LO È NEMMENO $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

OSSERVAZIONE: $|\mathbb{Q}| < |\mathbb{R}|$

$|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

PRINCIPIO DI INDUZIONE

Def: L'INSIEME $\mathbb{N}$ DEI NUMERI NATURALI È BEN ORDINATO CIOÈ
$\forall n \in \mathbb{N}$ $n \leq n+1$
SI PARLA DI ORDINAMENTO TOTALE DI $\mathbb{N}$ CIOÈ PRESI $n \neq m \in \mathbb{N}$
SI HA CHE O $n \leq m$ O $m \leq n$

Def: DATO UN SOTTOINSIEME $A \subseteq \mathbb{N}$ NON VUOTO ESSO HA UN ELEMENTO MINIMO, NECESSARIAMENTE UNICO, CIOÈ $\exists a \in A$ T.C $\forall n \in \mathbb{N}$ $a \leq n$

GRAZIE ALLA SECONDA DEFINIZIONE SI PUÒ PORRE LA BASE PER IL PRINCIPIO DI INDUZIONE CHE HA DUE PRINCIPALI APPLICAZIONI: LE DIMOSTRAZIONI PER INDUZIONE E LE DEFINIZIONI DI FUNZIONI PER INDUZIONE.

DIMOSTRAZIONE PER INDUZIONE:
SIA $n_0 \in \mathbb{N}$ E SIA $P(n)$ UN'AFFERMAZIONE DIPENDENTE DAL PARAMETRO n CHE HA SENSO $\forall n \geq n_0$ E NON ESSERE VERA O FALSA

SUPPONIAMO DI ESSERE INTERESSATI A DIMOSTRARE CHE $P(n)$ SIA VERA $\forall n \geq n_0$, ALLORA SI METTONO IN ATTO QUESTI DUE PASSI

1) PASSO INIZIALE: VERIFICARE CHE $P(n_0)$ SIA VERA

2) PASSO INDUTTIVO: SUPPONIAMO CHE $P(n)$ SIA VERA, ALLORA È VERA ANCHE $P(n+1)$ $\forall n \geq n_0$

ATTENZIONE! NON SI RICHIEDE DI DIMOSTRARE $P(n)$ MA SOLO DI SUPPORRE CHE SIA VERA PER POI DIMOSTRARE $P(n+1)$

ES $P(n) = 2^n \geq n$

$n_0 = 1$

PASSO INIZIALE: $P(1) = 2 \geq 1$ ✓

PASSO INDUTTIVO: SUPPONIAMO CHE $P(n)$ SIA VERA, DIMOSTRIAMO CHE ALLORA ANCHE $P(n+1)$ È VERA, CIOÈ

$2^n \geq n \Rightarrow 2^{n+1} \geq n+1$

$2^{n+1} = 2^n \cdot 2$

USANDO L'IPOTESI INDUTTIVA CHE AFFERMA CHE $P(n)$ SIA VERA POSSIAMO DIRE CHE:

$2^n \cdot 2 \geq n \cdot 2$

È OVVIO CHE $n \cdot 2$ CIOÈ $n+n \geq n+1$
QUINDI È FACILMENTE VERIFICATO CHE $2^n \cdot 2 \geq n+1$ CIOÈ $2^{n+1} \geq n+1$

ES $P(n) = (1+x)^n \geq 1+nx$

$n_0 = 0$

PASSO INIZIALE: $P(0) = 1 \geq 1$ ✓

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745